

Université Paris-Sud

Faculté des sciences d'Orsay

École doctorale de mathématiques de la région Paris-sud (ED 142)

Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

par

Caroline OBRECHT

Sur l'approximation modulationnelle du problème des ondes de surface : Consistance et existence de solutions pour les systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson à dispersion exacte.

Date de soutenance : 29/06/2015

| | | |
|-----------------------|---------------------|----------------------|
| Composition du jury : | Didier BRESCH | (Rapporteur) |
| | David LANNES | (Rapporteur) |
| | Jean-Claude SAUT | (Directeur de thèse) |
| | Christian KLEIN | (Examineur) |
| | Frédéric LAGOUTIERE | (Examineur) |

Abstract

On the modulational approximation of the water waves problem: Consistency and well-posedness of the full dispersion Benney-Roskes and Davey-Stewartson systems

This thesis is concerned with asymptotic models to the water wave equations in the modulational regime. The water wave equations describe the motion - under the influence of gravity and possibly surface tension - of an inviscid fluid in a domain which is bounded by a fixed bottom from below and the free surface of the fluid from above. In the study of the water wave problem, one is in particular interested by waves propagating on the surface of the fluid.

In the modulational regime, one considers the evolution of surface waves under the form of small amplitude wave packets traveling in one direction. It is well known that the evolution of the wave packet envelope on the long time scale $t = O(\epsilon^{-2})$, where $\epsilon \ll 1$ denotes the amplitude of the wave, is approximately governed by a set of equations known as the Benney-Roskes (BR) / Davey-Stewartson (DS) systems. These systems are essentially given by a cubic Schrödinger-type equation coupled to a wave equation. The classical BR / DS approximation is well established and has been largely studied in the past decades. Recently, David Lannes has introduced a "full dispersion" version of these systems. In contrast to the standard BR / DS equations, the full dispersion systems preserve the linear dispersion relation of the full water wave equations, and should therefore give a richer description of the original wave dynamics than the classical approximation.

The full dispersion BR / DS systems are studied in this thesis. In the first part, we formally derive the full dispersion BR / DS approximation from the water wave equations both in the case of zero and positive surface tension. The formal derivation is completed by a consistency result.

We then study well-posedness in Sobolev space of the full dispersion BR system. In order to justify consistency of the BR approximation with the full water wave equations, one needs to show that the BR system is well posed on a time scale of order $O(\epsilon^{-1})$. This is an open problem even in the classical case, at least for the 1 + 2 dimensional system. We also do not obtain well-posedness on the long time scale for the full dispersion BR system, but we can show that it is locally well-posed in the case of sufficiently strong surface tension, and additionally in the zero surface tension case if we restrict ourselves to the 1+1 dimensional system. The proof is inspired by a paper of Schochet-Weinstein, and is based on writing the full dispersion BR system as a quasilinear symmetric hyperbolic system with dispersive perturbation, where the dispersive terms do not contribute to the energy. We can therefore apply classical solution methods for hyperbolic systems.

By modifying the nonlinear part of the 1+1 dimensional full dispersion BR system without changing consistency, we obtain a system that is well-posed on the appropriate $O(\epsilon^{-1})$ time scale. This approach however does not generalize to the 1+2 dimensional case.

In the last chapter of the thesis, we give some results on the full dispersion DS systems, which are obtained as special limits of the full dispersion BR system. For these systems, it is sufficient to prove local well-posedness in order to show consistency with the water wave equations. For the standard DS systems, local well-posedness theory is quite complete. For the full dispersion systems, the analysis is complicated by some nonlocal operators and the equations seem to be generally ill-posed. There are however some simple cases where local well-posedness can be shown. We also discuss some modifications of the full dispersion DS system that might allow to solve it for a larger range of parameters.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des modèles asymptotiques aux équations des ondes de surface dans le régime modulationnel. Le problème des ondes de surface consiste à décrire le mouvement - sous l'influence de la gravitation et éventuellement de tension de surface - d'un fluide dans un domaine délimité par la surface libre du fluide et par un fond fixe. Dans l'étude de ce problème, on s'intéresse en particulier aux ondes se propageant à la surface du fluide.

Dans le régime modulationnel, on considère l'évolution des ondes de surface sous forme de paquets d'ondes de faible amplitude se propageant dans une direction. Il est bien connu que la motion de l'enveloppe du paquet d'onde sur une échelle de temps d'ordre $t = O(\epsilon^{-2})$, où $\epsilon \ll 1$ désigne l'amplitude, est décrite approximativement par des systèmes d'équations appelés systèmes de Benney-Roskes (BR) / Davey-Stewartson (DS). Ces systèmes sont donnés par une équation de type Schrödinger cubique couplée à une équation d'ondes. L'approximation classique de BR / DS est bien établie et a été largement étudiée au cours des dernières décennies. Récemment, David Lannes a introduit une version à "dispersion exacte" de ces systèmes. Contrairement aux équations de BR / DS standard, les systèmes à dispersion exacte préservent la relation de dispersion des équations des ondes de surface. On devrait obtenir ainsi une description plus riche du vrai comportement dynamique des ondes de surface que dans le cas de l'approximation classique.

Les systèmes de BR / DS à dispersion exacte sont étudiés dans cette thèse. La première partie est consacrée à la déduction formelle des systèmes de BR / DS en tant que modèles asymptotiques aux équations des ondes de surface. Nous donnons en outre un résultat sur la consistance de cette approximation.

Ensuite, nous étudions le problème de Cauchy pour le système de BR à dispersion exacte. En fait, afin de justifier la consistance de l'approximation de BR avec les équations exactes, on doit prouver que ce système est bien posé (en espace de Sobolev) sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-1})$. Ceci est un problème ouvert même dans le cas classique, du moins pour le système de dimension $1 + 2$. De même, nous ne pouvons pas démontrer l'existence de solutions en temps long pour le système de BR à dispersion exacte, mais nous obtenons un théorème d'existence locale ($t = O(1)$) à condition que la tension de surface soit assez forte. Si nous nous restreignons au système de dimension $1+1$, nous pouvons enlever la contrainte sur la tension de surface. L'idée de la preuve d'existence locale, qui est inspirée par un travail de Schochet-Weinstein, est d'écrire le système de BR comme un système symétrique hyperbolique quasi-linéaire perturbé par un terme dispersif ne contribuant pas à l'énergie du système. Ainsi, nous pouvons appliquer les méthodes standard de résolution des systèmes hyperboliques.

En modifiant le terme non-linéaire du système de BR de dimension $1+1$ sans changer l'ordre de consistance, nous obtenons un système qui est bien posé sur l'échelle de temps appropriée $O(\epsilon^{-1})$. Cependant, cette démarche ne peut pas être généralisée au cas de dimension $1+2$.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous donnons quelques résultats sur les systèmes de Davey-Stewartson à dispersion exacte. Pour les systèmes de DS, il est suffisant de démontrer qu'ils sont bien posés localement afin de justifier leur consistance avec les équations des ondes de surface. La théorie d'existence de solutions est assez complète pour le système de DS classique. Dans le cas de dispersion exacte cependant, les équations paraissent mal posées généralement, si bien que l'existence locale ne peut être démontrée pour l'instant que pour quelques cas particuliers simples.

Remerciements

Je remercie tout d'abord chaleureusement mon directeur de thèse Jean-Claude Saut pour sa patience et bienveillance, sa grande réactivité, son encouragement et ses nombreux conseils qui m'ont permis de mener à bien cette thèse. Je suis très reconnaissante d'avoir pu profiter de sa grande expérience en recherche, et de sa connaissance quasi-encyclopédique des très nombreux travaux en EDP et hydrodynamique, où se trouvait souvent une piste m'aidant à avancer dans ma recherche.

Un grand merci à Didier Bresch et David Lannes d'avoir accepté d'être rapporteur pour ma thèse et d'avoir pris le temps de lire le manuscrit en entier et d'écrire des rapports détaillés. Merci également à Christian Klein et Frédéric Lagoutière de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie le directeur de l'école doctorale Frédéric Paulin de le rendre possible de terminer ma thèse dans les meilleures conditions. Merci à Valérie Blandin-Lavigne, Catherine Poupon et Sophie Havard pour leur aide avec les démarches administratives.

Merci également aux organisateurs des conférences auxquelles j'ai pu participer. C'était toujours une bonne occasion d'apprendre, de découvrir des beaux travaux de recherche, et de faire connaissance avec des gens sympas venant de pays différents. Cela m'a souvent aidée à me (re)motiver pour ma propre recherche .

Je remercie les doctorants et jeunes chercheurs que j'ai rencontrés durant la thèse pour les moments d'échange et pour le plaisir de partager ses expériences avec quelqu'un. Merci en particulier à Céline, Émilie et Pierre-Antoine pour l'atmosphère agréable dans notre bureau, et pour leur effort de le transformer en jardin. Un grand merci à Imène pour son aide avec la préparation du pot de thèse. Merci également à Anna et Alba pour leur amitié.

Un grand merci finalement à ma famille et à ma belle-famille, dont le soutien était indispensable à la réalisation de cette thèse. Merci tout d'abord à Artem pour son amour, et pour les belles échappées du quotidien en VTT. Merci à la petite Alice d'être un tel bonheur. Merci à mes parents, à ma soeur et à ma belle-mère qui m'ont beaucoup aidée avec la garde d'Alice en dernière année de thèse pour me permettre de terminer le manuscrit.

Liebe Ma, lieber Pa, liebe Isi, vielen Dank für eure Unterstützung vor allem bei der Betreuung von Alice, ihr habt sehr viel dazu beigetragen, dass ich meine Doktorarbeit fertig stellen konnte! Danke, dass ich mich immer auf euch verlassen kann, und dass ihr für mich da seid, wenn ich Hilfe brauche.

Дорогая Бабушка Женя, спасибо большое Вам за помощь и за то, что нянчили Алису когда я работала в библиотеке. Спасибо тоже за вкусную еду которую готовили каждый день!

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 1.1 | Le sujet de la thèse | 4 |
| 1.2 | Introduction aux équations des ondes de surface | 9 |
| 1.2.1 | Les équations d'Euler à surface libre | 9 |
| 1.2.2 | Le modèle linéaire | 11 |
| 1.2.3 | Mise sous forme non-dimensionnelle des équations des ondes de surface | 12 |
| 1.3 | L'approximation modulationnelle dans le régime faiblement non-linéaire | 14 |
| 1.3.1 | Le régime faiblement non-linéaire | 14 |
| 1.3.2 | L'approximation modulationnelle | 15 |
| 1.3.3 | Remarques sur les systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson | 18 |
| 1.4 | Résultats existants | 21 |
| 1.4.1 | Existence de solutions aux équations des ondes de surface | 21 |
| 1.4.2 | Résultats sur la justification des modèles asymptotiques dans l'approximation modulationnelle | 22 |
| 2 | Derivation and consistency of the full dispersion Benney-Roskes system | 23 |
| 2.1 | Preliminaries | 23 |
| 2.1.1 | Notations | 23 |
| 2.1.2 | Equations of motion | 24 |
| 2.1.3 | Asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator | 25 |
| 2.1.4 | The linearized system | 27 |
| 2.2 | Construction of an asymptotic solution | 28 |
| 2.2.1 | Choosing the ansatz | 28 |
| 2.2.2 | Asymptotic expansion of the water wave equations | 29 |
| 2.2.3 | Cancelling the small order terms | 38 |
| 2.3 | Consistency of the FDBR model | 42 |
| 3 | The Cauchy problem for the full dispersion Benney-Roskes system | 45 |
| 3.1 | Idea of the proof of local well-posedness | 46 |
| 3.2 | Wellposedness of the one dimensional FDBR system | 49 |
| 3.2.1 | Rewriting the second and third equation of the FDBR system | 49 |
| 3.2.2 | Coming back to the complete system | 51 |
| 3.2.3 | The modified 1D FDBR model | 56 |
| 3.3 | The Schochet-Weinstein method for the higher-dimensional ZR system | 59 |
| 3.4 | The two-dimensional full dispersion Benney-Roskes system | 61 |
| 3.4.1 | Modified two dimensional FDBR | 63 |
| 3.5 | Summary of the well-posedness results | 66 |

| | | |
|-----|---|-----------|
| 3.6 | Remarks on traveling waves | 66 |
| 4 | The full dispersion Davey-Stewartson systems | 71 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le sujet de la thèse

Le problème des ondes de surface consiste à décrire le mouvement - sous l'influence de la gravitation et éventuellement de la tension superficielle - d'un fluide non-visqueux dans un domaine qui est délimité par la surface libre du fluide et par un fond ¹ fixe. L'évolution d'un tel fluide est gouvernée par un système dynamique appelé équations d'Euler à surface libre² que nous donnons dans la section suivante. Ces équations modélisent par exemple des ondes océaniques (en l'absence de vent) ou l'écoulement d'eau dans un canal.

Dans la résolution des équations d'Euler, on est généralement intéressé par les ondes qui se produisent à la surface du fluide, c'est-à-dire on souhaite déterminer l'évolution en temps de la surface libre $\Sigma(t)$.

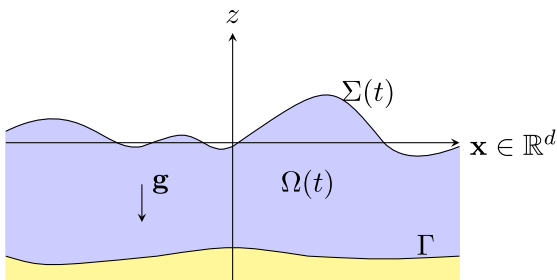


FIGURE 1.1 : Schéma du problème des ondes de surface. t : variable temporelle. $\Sigma(t)$: surface libre du fluide, $\Omega(t)$: domaine du fluide, Γ : fond du fluide \mathbf{g} : champ gravitationnel.

Le problème des ondes de surface est très classique et possède une longue histoire. ³ Les équations de l'hydrodynamique qui décrivent le mouvement d'un fluide non-visqueux ont été déjà (partiellement) établies au milieu du 18ème siècle par Leonhard Euler. Les équations d'Euler avec surface libre ("water waves") ont été dérivées par Lagrange en 1781, voir [Dar05]. Un autre exemple célèbre dont les débuts datent du 19ème siècle est l'étude et la description théorique de la propagation des ondes solitaires dans un bassin peu profond. L'intérêt dans cette question a été suscité par la découverte

¹Le cas de profondeur infinie est aussi largement étudié.

²Les équations d'Euler sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en négligeant les effets de viscosité.

³Un aperçu des origines du problème des ondes de surface est par exemple donné dans [Cra04]. Voir aussi [SH91] pour un résumé du développement de la théorie des ondes solitaires, ou [Mit02] pour l'histoire de l'étude des ondes océaniques.

de "l'onde de translation" , c'est-à-dire d'une onde de surface qui se propage à vitesse constante sans déformation de son profil. Ce phénomène a été décrit pour la première fois en 1834 par John Scott Russell qui a observé une telle onde dans le "Union Canal" en Écosse.

Actuellement, la recherche sur les ondes de surface est très active, et il existe un nombre énorme de travaux scientifiques dans ce domaine. Pour une introduction au problème des ondes de surface nous renvoyons au livre de Johnson [Joh97], et au livre de Lannes [Lan13], où des nombreuses références bibliographiques sont incluses.

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans le problème de déduire des modèles asymptotiques aux équations des ondes de surface. Un modèle asymptotique est une approximation des équations exactes qui est valable en général dans un régime particulier tel que par exemple des ondes de faible amplitude ou l'eau peu profonde. L'intérêt des modèles asymptotiques est qu'ils sont généralement plus faciles à résoudre (numériquement et analytiquement) que le problème exact tout en donnant une approximation suffisante pour les applications. Ces modèles sont souvent introduits par des physiciens et étudiés ensuite par la communauté mathématique. Les modèles courants sont présentés en détail par exemple dans le livre de David Lannes [Lan13].

Par la suite, nous sommes concernés plus précisément par des modèles asymptotiques qui apparaissent dans l'approximation modulationnelle des ondes de surface. Nous allons décrire brièvement le principe de cette approximation ici.

Nous supposons dans ce qui suit que le fluide est incompressible et irrotationnel. Dans ce cas-là, l'écoulement peut être décrit par un potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ satisfaisant l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ sur le domaine du fluide. Ici, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, avec $d = 1$ ou $d = 2$, désigne la variable d'espace horizontale, z la variable d'espace verticale et t la variable du temps (voir figure 1.1). En plus de l'équation de Laplace, le potentiel doit satisfaire certaines conditions à la surface libre du fluide. Dans le cas où la surface peut être paramétrisée par un graphe $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$, ces conditions⁴ sont données par

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + g\zeta + \mathfrak{s}\kappa(\zeta) = 0 & \text{sur } \{z = \zeta(\mathbf{x}, t)\}, \\ \partial_t \zeta + \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \zeta - \partial_z \phi = 0 & \text{sur } \{z = \zeta(\mathbf{x}, t)\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

où g est la constante gravitationnelle, \mathfrak{s} le coefficient de tension superficielle et $\kappa(\zeta)$ désigne la courbure moyenne de la surface libre. Les deux équations de (1.1) donnent une relation entre ζ et la valeur du potentiel $\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}, t), t)$ à la surface du fluide.

L'approximation modulationnelle de (1.1) intervient dans la modélisation de l'évolution d'une onde de surface sous forme

$$\epsilon A(\epsilon \mathbf{x}, \epsilon t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + c.c.,$$

où $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre, et *c.c.* désigne le conjugué complexe du terme précédent. Il s'agit d'un paquet d'onde de faible amplitude se propageant dans une direction, et dont l'amplitude est faiblement modulée en temps et dans les directions horizontales. Des ondes sous cette forme apparaissent naturellement dans l'étude des équations d'Euler à surface libre car celles-ci représentent un système dispersif non-linéaire. En effet, nous allons voir ci-dessous que les équations linéarisées autour de $(\zeta, \psi) = (0, 0)$ admettent des solutions sous forme d'ondes planes

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\omega}{\vartheta} A \\ A \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

⁴Nous donnerons une déduction plus détaillée dans la section suivante.

où A et B sont des constantes et la fréquence ω et le vecteur d'onde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ sont liées par la relation de dispersion

$$\omega^2 = |\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(\beta|\mathbf{k}|^2 + 1). \quad (1.3)$$

En outre, $\vartheta = \vartheta(\mathbf{k}) = \beta|\mathbf{k}|^2 + 1$, et les paramètres positifs β et μ seront définis dans (1.29).

Pour des ondes de faible amplitude $A = O(\epsilon)$, on peut considérer le problème des ondes de surface non-linéaire comme une petite perturbation du modèle linéaire. En effet, les termes non-linéaires des équations d'Euler à surface libre sont du moins d'ordre $O(\epsilon^2)$, donc leur contribution est relativement négligeable par rapport aux termes linéaires quand ϵ est petit. Il est donc naturel de chercher des solutions qui sont proches des ondes planes définies par (1.2). L'ansatz habituel, qui tient compte de l'observation que l'amplitude d'une onde plane est lentement modulée par des effets non-linéaires, est donné par

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix} \approx \epsilon \begin{pmatrix} i\frac{\omega}{\vartheta} A(\epsilon\mathbf{x}, \epsilon t) \\ A(\epsilon\mathbf{x}, \epsilon t) \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ B(\epsilon\mathbf{x}, \epsilon t) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

On essaie ensuite de déterminer des conditions pour $A(\epsilon\mathbf{x}, \epsilon t)$ et $B(\epsilon\mathbf{x}, \epsilon t)$ telles que ces paquets d'ondes satisfont, dans un certain sens que nous préciserons ci-dessous, approximativement les équations non-linéaires quand ϵ est petit. Ceci donne des équations pour les enveloppes A et B qu'on appelle des modèles asymptotiques.

La recherche des modèles asymptotiques aux équations des ondes de surface dans le régime modulationnel est un problème classique. Les premiers travaux datent des années 1960-1970 et ont été motivés par la découverte de l'instabilité modulationnelle (instabilité de Benjamin-Feir) de l'onde de Stokes en eau profonde (voir par exemple [BF67], [HO72]).

Dans le cas d'eau de profondeur finie, les modèles classiques qu'on obtient ainsi sont du type Benney-Roskes / Davey-Stewartson. Pour une surface libre de dimension $d = 2$, le système de Benney-Roskes (BR), qui a été établi pour la première fois par ses auteurs dans [BR69], est donné par

$$\begin{cases} \partial_T A + \omega' \partial_X A - i\frac{\epsilon}{2}(\omega'' A_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} A_{YY}) + i\epsilon[|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P_0 + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P_0 + \sqrt{\mu} \Delta B = -\frac{2\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -\frac{2\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ce système est un couplage entre une équation de type Schrödinger cubique pour la fonction complexe A , et une équation d'ondes pour les fonction réelles B et P_0 . L'enveloppe A (ainsi que les autres inconnus) est vue comme une fonction des variables "lentes" $X = \epsilon x$, $Y = \epsilon y$, $T = \epsilon t$

$$A(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon t) = A(X, Y, T),$$

et on suppose sans perte de généralité que le paquet d'ondes se propage en direction des x , avec un vecteur d'onde $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_x$. En outre $\omega = \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{|\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(\beta|\mathbf{k}|^2 + 1)}$, et ω' et ω'' désignent la première et seconde dérivée de ω par rapport à $|\mathbf{k}|$. La fonction inconnue P_0 intervient dans la correction d'ordre supérieur de l'ansatz (1.4). En effet, la surface libre ζ est liée à A et P_0 par un développement asymptotique

$$\zeta = \epsilon \frac{i\omega}{\vartheta} A(X, Y, T) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + \epsilon^2 \{P_0(X, Y, T) + \dots\} + O(\epsilon^3).$$

Les constantes γ_1 et γ_2 dans (1.5) ne dépendent que de $|\mathbf{k}|$, μ et β .

Il est courant de "simplifier" le système de Benney-Roskes au prix d'une approximation supplémentaire. Pour cela, on utilise l'observation que sur la première échelle temporelle d'ordre $O(\epsilon^{-1})$,

l'enveloppe A se comporte approximativement comme une onde de translation se propageant en direction des X à vitesse de groupe. En effet, la première équation de (1.5) donne

$$\partial_T A + \omega' \partial_X A = O(\epsilon).$$

Il est donc convenable de chercher des solutions sous forme

$$\begin{aligned} A(X, Y, T) &= A(X - \omega' T, Y, \epsilon T) = A(\chi_1, \chi_2, \tau), \\ B(X, Y, T) &= B(X - \omega' T, Y, \epsilon T) = B(\chi_1, \chi_2, \tau), \\ P_0(X, Y, T) &= P_0(X - \omega' T, Y, \epsilon T) = P_0(\chi_1, \chi_2, \tau), \end{aligned}$$

où on a introduit une nouvelle variable temporelle $\tau = \epsilon T$ pour pouvoir décrire l'évolution de la solution sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-2})$. En substituant cet ansatz dans le système de Benney-Roskes (1.5) et en négligeant certains termes d'ordre $O(\epsilon)$ on obtient le système de Davey-Stewartson (DS)

$$\begin{cases} 2iA_\tau + \omega'' A_{\chi_1 \chi_1} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} A_{\chi_2 \chi_2} - 2(\alpha_1 B_{\chi_1} + \alpha_2 |A|^2)A = 0, \\ (\sqrt{\mu} - (\omega')^2) B_{\chi_1 \chi_1} + \sqrt{\mu} B_{\chi_2 \chi_2} = -2\alpha_1 |A|_{\chi_1}^2. \end{cases}$$

Notons qu'en dimension 1+1, le système de DS se réduit à

$$\begin{cases} 2iA_\tau + \omega'' A_{\chi_1 \chi_1} - 2(\alpha_1 B_{\chi_1} + \alpha_2 |A|^2)A = 0, \\ (\sqrt{\mu} - (\omega')^2) B_{\chi_1 \chi_1} = -2\alpha_1 |A|_{\chi_1}^2. \end{cases}$$

L'enveloppe A satisfait donc une équation de Schrödinger cubique

$$2iA_\tau + \omega'' A_{\chi_1 \chi_1} + \alpha |A|^2 A = 0.$$

Dans le contexte des ondes de surface, le système de DS a été proposé pour la première fois comme modèle asymptotique par Davey et Stewartson dans [DS74], sans considérant l'effet de tension de surface. Cet effet est ajouté ensuite par Djordjevic et Redekopp [DR77] (voir aussi [AS79]).

Une amélioration potentielle de l'approximation de Benney-Roskes a été proposée récemment par David Lannes dans [Lan13]. En fait, dans le calcul cette approximation, on approche classiquement un opérateur pseudo-différentiel intervenant dans le système des ondes de surface linéarisé par des opérateurs différentiels. Ainsi, on obtient un système plus facile à résoudre mais on perd en précision dans la modélisation des dynamiques linéaires. Notamment, la relation de dispersion des ondes de surface (1.3) n'est pas préservée par l'approximation classique. Si on se passe de l'approximation de l'opérateur pseudo-différentiel, on obtient un système ayant la même structure que le système de BR standard, mais qui donne une description exacte du comportement dispersif. Ce système, qu'on appellera le système de Benney-Roskes "full dispersion" (FDBR), est donné par

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon[|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P_0 + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P_0 - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} B = -2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Les opérateurs pseudo-différentiels $\frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon D)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}$ et $|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}$ sont définis par la multiplication avec leurs symboles en domaine de Fourier (\mathcal{F} désigne la transformation de Fourier)

$$\frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon D)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}f = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon\xi)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}\mathcal{F}f(\xi)\right], \quad (1.7)$$

$$|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}f = \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|)}{\epsilon}\mathcal{F}f(\xi)\right].$$

Par le même ansatz que pour le système de BR standard, on peut également déduire le système de Davey-Stewartson "full dispersion".

Le système de Benney-Roskes standard est obtenu à partir du système "full dispersion" en remplaçant les opérateurs pseudo-différentiels en (1.6) par leurs développements asymptotiques d'ordre deux (rappelons que $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_x$)

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon D)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} &\approx \omega'D_X + \frac{\epsilon}{2}(\omega''D_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|}D_Y^2) = -i\omega'\partial_X - \frac{\epsilon}{2}(\omega''\partial_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|}\partial_Y^2), \\ |D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} &\approx \sqrt{\mu}|D|^2 = -\sqrt{\mu}\Delta. \end{aligned}$$

Cette thèse sera centrée sur l'analyse des systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson "full dispersion". Le plan de la thèse est le suivant : Dans ce premier chapitre, nous présentons d'abord les équations d'Euler à surface libre qui gouvernent la motion du fluide. A partir de certain paramètres caractéristiques de l'écoulement, nous définissons le régime modulationnel et nous décrivons plus précisément la démarche de l'approximation modulationnelle. Le chapitre sera complété par quelques remarques introductives sur les systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson et par un aperçu des résultats existants.

Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à la déduction du système de Benney-Roskes "full dispersion" en tant que modèle asymptotique aux équations des ondes de surface par une analyse modulationnelle. En même temps, nous calculons l'erreur qui se produit au cours de l'approximation, ce qui permet de compléter la déduction du système de FDBR par un résultat sur sa consistance avec les équations des ondes de surface.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le problème de Cauchy pour le système de FDBR. En effet, afin de justifier la consistance de l'approximation de BR avec les équations exactes, on doit prouver que ce système est bien posé (en espace de Sobolev) sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-1})$. Ceci est un problème ouvert même dans le cas classique, du moins pour le système de dimension $1+2$. De même, nous ne pouvons pas démontrer l'existence de solutions en temps long pour le système de BR à dispersion exacte, mais nous obtenons un théorème d'existence locale ($t = O(1)$) sous condition que la tension de surface soit assez forte.⁵

Dans le dernier chapitre de la thèse, nous traitons le système de Davey-Stewartson full dispersive. Contrairement aux systèmes de Davey-Stewartson classiques, il paraît que ce système est généralement mal posé. Nous démontrons l'existence locale de solutions dans quelques cas particuliers, et nous introduisons quelques modifications qui devraient permettre de résoudre le système avec moins de restrictions sur les paramètres.

⁵En dimension $1+1$, on peut démontrer que le système est bien posé quelle que soit la valeur de la tension de surface.

1.2 Introduction aux équations des ondes de surface

Dans cette section, nous donnons les équations qui régissent l'évolution en temps d'un fluide à surface libre, et nous les mettons sous forme non-dimensionnelle en normalisant inconnus et variables par rapport à certaines quantités caractéristiques de l'écoulement du fluide. La normalisation permettra par la suite de définir le régime asymptotique dans lequel on peut effectuer l'approximation modulationnelle.

1.2.1 Les équations d'Euler à surface libre

Nous dénotons la variable temporelle par $t \in \mathbb{R}$, les variables d'espace horizontales par $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, où $d = 1$ ou $d = 2$, et la variable d'espace verticales par $z \in \mathbb{R}$. Le mouvement du fluide peut être décrit par un champ de vitesses $\mathbf{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ qui associe à une particule de fluide situé à (\mathbf{x}, z) en temps t sa vitesse $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, z)$. En outre, nous dénotons la pression exercée sur une particule par $P(t, \mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}$. Nous supposons que la force gravitationnelle agit en direction verticale $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, où g est une constante positive et \mathbf{e}_z le vecteur unité en direction de z .

Dans cette thèse, nous supposons que le fluide satisfait les propriétés suivantes :

- Le fluide est de densité constante ρ .
- L'écoulement est incompressible et irrotationnel.
- Le fluide est de profondeur finie.
- La surface libre sépare le fluide du vacuum.
- Le fond du fluide, que nous désignons par Γ , est plat.
- La surface libre du fluide peut être paramétrisée par un graphe $z = \zeta(t, \mathbf{x})$.
- On considère des écoulements sans ou avec tension superficielle.

Remarquons qu'on ne se limite pas toujours à ces contraintes-là dans l'étude des ondes de surface, qui du reste excluent quelques cas intéressants comme des tourbillons ou des vagues déferlantes. Il existe des nombreux travaux qui considèrent par exemple des fluides de profondeur infinie, ou encore d'écoulements rotationnels ou de densité variable.

Les équations qui décrivent l'évolution du fluide à l'intérieur de son domaine $\Omega(t)$ sont alors données par

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega(t), \quad (1.9)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega(t). \quad (1.10)$$

L'équation (1.8) qui exprime le bilan des forces agissant sur le fluide est appelée équation d'Euler. Les équations (1.9) et (1.10) signifient que l'écoulement est incompressible et irrotationnel.

Les équations (1.8)-(1.10) sont complétées par des conditions à la surface libre et au fond du fluide. Ces conditions expriment le fait que les particules du fluide ne peuvent pas franchir les surfaces bordantes du domaine $\Omega(t)$. Puisque nous supposons que le fond est plat, cela signifie que la composante verticale du champ de vitesses s'annule au fond, donc

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (1.11)$$

Quant à la surface libre qui varie en temps, on doit demander qu'elle se déplace à la vitesse du fluide. Puisque nous supposons que la surface libre est paramétrisée par un graphe, le chemin $(\mathbf{x}(t), z(t))$ d'une particule évoluant sur la surface doit satisfaire $z(t) = \zeta(t, \mathbf{x}(t))$. Il s'en suit que $z'(t) = \zeta_t(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{x}(t) \cdot \nabla \zeta(t, \mathbf{x}(t))$, donc

$$\zeta_t = (-\nabla \zeta, 1)^T \cdot \mathbf{v} \quad \text{sur } \{z = \zeta(t, \mathbf{x})\}. \quad (1.12)$$

Finalement, nous avons une condition à la surface libre pour la pression

$$P = \mathfrak{s}\kappa(\zeta) \quad \text{sur } \{z = \zeta(t, \mathbf{x})\}. \quad (1.13)$$

Le terme $\mathfrak{s}\kappa(\zeta)$ décrit l'influence de la tension superficielle. Le coefficient $\mathfrak{s} \geq 0$ indique la force de la tension, en particulier il s'annule quand on néglige cet effet. La fonction $\kappa(\zeta) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1+|\nabla \zeta|^2}} \right)$ désigne la courbure moyenne de la surface libre.

Dans le cas d'un fluide incompressible et irrotationnel, on peut reformuler les équations d'Euler à surface libre en fonction d'un potentiel de vitesse $\phi(t, \mathbf{x}, z)$. En effet, les équations (1.10) and (1.9) impliquent l'existence d'une fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla \phi = \mathbf{v}$ et ϕ satisfait l'équation de Laplace sur le domaine du fluide

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{sur } \Omega(t). \quad (1.14)$$

Ensuite, (1.10) permet d'écrire l'équation d'Euler (1.8) comme

$$\nabla \left(\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega(t). \quad (1.15)$$

En intégrant cette équation on obtient

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = C(t) \quad \text{sur } \Omega(t). \quad (1.16)$$

En remplaçant le potentiel par $\phi + \int_0^t C(\tau) d\tau$ on peut prendre $C(t) = 0$. (1.16) est appelée l'équation de Bernoulli. Les conditions à bord (1.12) et (1.11) s'expriment en fonction de ϕ comme

$$\partial_z \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1.17)$$

$$\zeta_t = (-\nabla \zeta, 1)^T \cdot \nabla \phi \quad \text{sur } \{z = \zeta(t, \mathbf{x})\}. \quad (1.18)$$

La formulation de Craig-Sulem-Zakharov du problème des ondes de surface

Dans le cas où on s'intéresse principalement à déterminer l'évolution de la surface libre, les équations d'Euler et Bernoulli sont des formulations moins convenables car ils ne donnent pas directement d'informations sur $\zeta(t, \mathbf{x})$. Aussi, ces équations sont posées sur un domaine qui varie en temps, ce qui complique l'analyse mathématique.

Une formulation qui est souvent utilisée dans l'étude du problème des ondes de surface est celle de Craig-Sulem-Zakharov. Elle consiste à réécrire les équations de Bernoulli uniquement en fonction de $\zeta(t, \mathbf{x})$ et de la valeur $\psi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}, \zeta(t, \mathbf{x}))$ du potentiel à la surface du fluide (voir les papiers de Craig-Sulem-Sulem [CS93], [CSS97]). Cette reformulation est basée sur un travail de Zakharov [Zak68] qui a découvert qu'il suffit de connaître ζ et ψ pour décrire le mouvement du fluide. En effet, si ζ and ψ sont donnés (et assez réguliers, voir par exemple [ABZ13]), on peut déterminer le potentiel de vitesse partout dans $\Omega(t)$ en solvant le problème de Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega(t), \\ \phi|_{z=\zeta} = \psi, \quad \partial_z \phi|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Ensuite, on utilise l'équation de Bernoulli (1.16) pour calculer la pression P .

Il reste à déterminer ζ et ψ telles que la condition (1.18) ainsi que l'équation de Bernoulli (1.16) en $z = \zeta(t, \mathbf{x})$ sont satisfaites. Pour exprimer ces équations en termes de ζ et ψ on introduit l'opérateur

$$\mathcal{G}[\zeta] : \psi \rightarrow \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \partial_{\mathbf{n}} \phi|_{z=\zeta}, \quad (1.20)$$

où $\partial_{\mathbf{n}} \phi$ désigne la dérivée de ϕ normale à la surface libre. $\mathcal{G}[\zeta]$ est appelé opérateur de Dirichlet-Neumann. Notons que $\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \partial_{\mathbf{n}} \phi|_{z=\zeta} = (-\nabla \zeta, 1)^T \cdot \nabla \phi|_{z=\zeta}$, donc

$$\mathcal{G}[\zeta] \psi = -\nabla \zeta \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi|_{z=\zeta} + \partial_z \phi|_{z=\zeta}. \quad (1.21)$$

Puisque $\psi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}, \zeta(t, \mathbf{x}))$, on a

$$\nabla \psi = \nabla_{\mathbf{x}} \phi|_{z=\zeta} + \nabla \zeta \partial_z \phi|_{z=\zeta}. \quad (1.22)$$

En résolvant le système (1.21) - (1.22) on obtient des expressions pour $\nabla_{\mathbf{x}} \phi|_{z=\zeta}$ et $\partial_z \phi|_{z=\zeta}$ en fonction de ψ , ζ et $\mathcal{G}[\zeta] \psi$. Avec (1.18) il s'ensuit en outre

$$\zeta_t = \mathcal{G}[\zeta] \psi.$$

Ensuite, on a

$$\psi_t = \partial_t \phi|_{z=\zeta} + \zeta_t \partial_z \phi|_{z=\zeta}, \quad (1.23)$$

ce qui permet de calculer $\partial_t \phi|_{z=\zeta}$.

En substituant les expressions ainsi obtenues dans l'équation de Bernoulli, on obtient que (1.18) et (1.16) sont équivalentes à

$$\begin{cases} \zeta_t - \mathcal{G}[\zeta] \psi = 0, \\ \psi_t + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(\mathcal{G}[\zeta] \psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \zeta|^2)} = -\frac{\mathfrak{s}}{\rho} \kappa(\zeta). \end{cases} \quad (1.24)$$

Ceci est la formulation du problème des ondes de surface que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

1.2.2 Le modèle linéaire

En linéarisant les équations des ondes de surface (1.24) autour de la solution d'équilibre $(\zeta, \psi) = (0, 0)$, on obtient le modèle linéaire

$$\begin{cases} \zeta_t - \mathcal{G}[0] \psi = 0, \\ \psi_t + g\zeta = \frac{\mathfrak{s}}{\rho} \Delta \zeta. \end{cases} \quad (1.25)$$

En résolvant le modèle linéaire on obtient la relation de dispersion propre aux ondes de surface, ainsi que d'autres paramètres "typiques" de l'écoulement qui seront utilisés dans la prochaine section pour la mise sous forme non dimensionnelle du système (1.24).

Pour calculer l'opérateur $\mathcal{G}[0] \psi$ il faut résoudre le problème de Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } \{-H_0 \leq z \leq 0\}, \\ \phi|_{z=0} = \psi, \quad \partial_z \phi|_{z=-H_0} = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Nous supposons ici que le fond plat est situé à $z = -H_0$. On vérifie aisément que la solution de ce problème est donnée par

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \frac{\cosh((z + H_0)|D|)}{\cosh(H_0|D|)}\psi.$$

Ici, nous utilisons la notation habituelle pour les multiplicateurs de Fourier : Un opérateur $M(D)$ est défini par

$$M(D)f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(M(\xi)\mathcal{F}f(\xi))(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} M(\xi)\hat{f}(\xi) d\xi,$$

c'est-à-dire par une multiplication par $M(\xi)$ en espace de Fourier.

Avec la définition de l'opérateur de Dirichlet-Neumann on obtient $\mathcal{G}[0]\psi = \partial_z\phi|_{z=0}$, donc

$$\mathcal{G}[0]\psi = |D| \tanh(H_0|D|)\psi.$$

Puisque $\mathcal{G}[0]$ agit comme multiplicateur de Fourier, les solutions du modèle linéaire peuvent être calculées facilement en appliquant la transformation de Fourier à (1.25) et en résolvant l'équation différentielle ordinaire pour $\hat{\zeta}$, $\hat{\psi}$.

Par la suite, nous utiliserons en particulier le fait que le système linéaire admet des solutions sous forme d'ondes planes. Plus précisément, cherchant des solutions sous la forme

$$\zeta = ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_0 t)} + c.c., \quad \psi = be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_0 t)} + c.c.$$

où $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ désigne le vecteur d'onde, $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes complexes et *c.c.* désigne le conjugué complexe du terme précédent, on calcule qu'une telle solution existe si et seulement si

$$a = \frac{i\omega_0}{g + \frac{5}{\rho}|\mathbf{k}|^2}b \tag{1.27}$$

et (pour $b \neq 0$)

$$\omega_0^2 = |\mathbf{k}| \tanh(H_0|\mathbf{k}|) \left(\frac{5}{\rho}|\mathbf{k}|^2 + g \right). \tag{1.28}$$

La fréquence ω de l'onde plane dépend donc d'une manière non-linéaire du vecteur d'onde \mathbf{k} , c'est-à-dire les équations des ondes de surface sont un système dispersive. L'équation (1.28) est appelée relation de dispersion des ondes de surface.

1.2.3 Mise sous forme non-dimensionnelle des équations des ondes de surface

Dans cette section, suivant [Lan13], nous allons normaliser les inconnues $\zeta(t, \mathbf{x})$ et $\psi(t, \mathbf{x})$ et les variables du temps et d'espace par rapport à quelques paramètres caractéristiques de l'écoulement du fluide. Les quantités normalisées sont ensuite injectées dans les équations des ondes de surface. Par cette substitution de variables on obtient le système sous forme non-dimensionnelle. La normalisation permet de distinguer des régimes dynamiques différents, par exemple le régime d'ondes de faible amplitude et le régime d'écoulement en eau peu profonde, et d'évaluer quels termes des équations des ondes de surface sont prédominants (ou par contre négligeables) dans ces régimes.

Pour normaliser, nous définissons les grandeurs physiques fondamentales qui caractérisent une onde de surface. Nous désignons l'amplitude moyenne par a , la longueur d'onde typique en direction des x par L_x et la longueur d'onde typique en direction des y par L_y , et la profondeur moyenne du fluide par H_0 . On peut alors introduire les quantités sans dimension

$$\tilde{x} = \frac{x}{L_x}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L_y}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{H_0}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{a}.$$

La mise à l'échelle de ψ et t est moins directe. Des coefficients de normalisation pertinents sont obtenus à partir du modèle linéaire. Pour cela, nous considérons la propagation d'une onde plane de la longueur d'onde typique $k_0 = \frac{2\pi}{L_x}$. Pour simplifier, nous supposons que l'onde se propage uniquement en direction des x . Comme nous l'avons vu dans la section précédente, pour être solution problème linéaire, l'onde plane doit se propager comme

$$e^{i(k_0 x - \omega_0(k_0)t)},$$

où ω_0 est définie par (1.28). Nous allons maintenant choisir \tilde{t} telle que $e^{i(k_0 x - \omega_0(k_0)t)} = e^{i2\pi(\tilde{x} - \tilde{t})}$, c.-à-d. telle que l'onde plane se propage à vitesse unitaire par rapport aux nouvelles variables. Ceci donne

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0(k_0)}{2\pi} t = \frac{t}{t_0}.$$

Finalement, en vue de (1.27), si l'amplitude typique du problème linéaire est d'ordre a , alors la taille du potentiel est d'ordre $a \frac{g + \frac{s}{\rho} k_0^2}{\omega_0(k_0)}$. Nous mettons donc

$$\tilde{\psi} = \frac{\omega_0(k_0)}{2\pi a(g + \frac{s}{\rho} k_0^2)} \psi = \frac{\psi}{\psi_0}.$$

On a alors les relations

$$\psi_t = \frac{\psi_0}{t_0} \tilde{\psi}_{\tilde{t}} = a\vartheta(k_0) \tilde{\psi}_{\tilde{t}}, \quad \zeta_t = \frac{a}{t_0} \tilde{\zeta}_{\tilde{t}} = \frac{a\omega(k_0)}{2\pi} \tilde{\zeta}_{\tilde{t}},$$

$$\nabla\psi = \frac{\psi_0}{L_x} \tilde{\nabla}^\gamma \tilde{\psi}, \quad \nabla\zeta = \frac{a}{L_x} \tilde{\nabla}^\gamma \tilde{\zeta}, \quad \text{où } \tilde{\nabla}^\gamma = (\partial_{\tilde{x}}, \frac{L_x}{L_y} \partial_{\tilde{y}})$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\zeta]\psi &= -\nabla\zeta \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\Phi|_{z=\zeta} + \partial_z\Phi|_{z=\zeta} = \left(-\frac{a\psi_0}{L_x^2} \tilde{\zeta}_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_{\tilde{x}} - \frac{a\psi_0}{L_y^2} \tilde{\zeta}_{\tilde{y}} \tilde{\Phi}_{\tilde{y}} + \frac{\psi_0}{H_0} \tilde{\Phi}_{\tilde{z}} \right) |_{\tilde{z}=\epsilon\tilde{\zeta}} \\ &= \frac{\psi_0}{H_0} \left(-\epsilon\mu \tilde{\zeta}_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_{\tilde{x}} - \epsilon\mu\gamma \tilde{\zeta}_{\tilde{y}} \tilde{\Phi}_{\tilde{y}} + \tilde{\Phi}_{\tilde{z}} \right) |_{\tilde{z}=\epsilon\tilde{\zeta}}. \end{aligned}$$

Quand nous substituons ensuite les variables et inconnues dans (1.24) par leurs versions normalisées, les calculs montrent que les équations dépendront alors uniquement des paramètres suivants

$$\varepsilon = \frac{a}{H_0}, \quad \mu = \frac{H_0^2}{L_x^2}, \quad \gamma = \frac{L_x}{L_y}, \quad \nu = \frac{\tanh(2\pi\sqrt{\mu})}{2\pi\sqrt{\mu}}, \quad \beta = \frac{s}{\rho g L_x^2}. \quad (1.29)$$

ε est appelé paramètre d'amplitude. μ mesure le caractère d'écoulement en eau peu profonde. β est l'inverse du nombre de Bond, qui représente le rapport entre forces gravitationnelles et tension superficielle sur une interface de deux fluides. $\beta = 0$ correspond à l'absence de tension de surface. Le système des ondes de surface sous forme non-dimensionnelle est donné par (nous omettons les tildas par la suite)

$$\begin{cases} \zeta_t - \frac{1}{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu,\gamma}[\varepsilon\zeta]\psi = 0, \\ \psi_t + \zeta + \frac{\varepsilon}{2\nu} |\nabla^\gamma \psi|^2 - \frac{\varepsilon\mu}{\nu} \frac{\left(\frac{1}{\mu} \mathcal{G}_{\mu,\gamma}[\varepsilon\zeta]\psi + \nabla^\gamma(\varepsilon\zeta) \cdot \nabla^\gamma \psi \right)^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu |\nabla^\gamma \zeta|^2)} = -\beta \frac{\kappa_\gamma(\varepsilon\sqrt{\mu}\zeta)}{\varepsilon\sqrt{\mu}}, \end{cases} \quad (1.30)$$

où $\nabla^\gamma = (\partial_x, \gamma \partial_y)^T$ si $d = 2$ et $\nabla^\gamma = \partial_x$ si $d = 1$. L'opérateur de Dirichlet-Neumann sous forme non-dimensionnelle est donné par

$$\mathcal{G}_{\mu,\gamma}[\varepsilon\zeta]\psi = -\mu \nabla^\gamma(\varepsilon\zeta) \cdot \nabla^\gamma \phi|_{z=\varepsilon\zeta} + \partial_z \phi|_{z=\varepsilon\zeta}, \quad (1.31)$$

où ϕ satisfait l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta^{\mu,\gamma} \phi = 0 & -1 \leq z \leq \varepsilon\zeta, \\ \phi|_{z=\varepsilon\zeta} = \psi, & \partial_z \phi|_{z=-1} = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

avec $\Delta^{\mu,\gamma} = \mu \nabla^\gamma \cdot \nabla^\gamma + \partial_z^2$. En outre, $\kappa_\gamma(\zeta) = -\nabla^\gamma \cdot \left(\frac{\nabla^\gamma \zeta}{\sqrt{1+|\nabla^\gamma \zeta|^2}} \right)$

A partir des paramètres (1.29) on peut introduire différents régimes asymptotiques des équations des ondes de surface. Un tel régime est défini en supposant que du moins un des paramètres (1.29) est petit. Par exemple, le régime de faible amplitude est caractérisé par $\varepsilon \ll 1$, et le régime d'eau peu profonde par $\mu \ll 1$.

Ayant fixé un régime asymptotique, on peut ensuite déduire des modèles asymptotiques qui représentent une approximation des équations des ondes de surface dans ce régime. Ces modèles sont en général obtenus formellement en approchant les opérateurs et fonctions intervenant dans (1.30) par leurs développements asymptotiques par rapport au petit paramètre. Cette démarche très classique (déjà appliquée au 19ème siècle) sera illustrée dans la prochaine section à l'exemple de l'approximation modulationnelle dans le régime des ondes de faible amplitude. De nombreux autres modèles asymptotiques, en particulier dans le régime d'eau peu profonde $\mu \ll 1$ qui inclue la célèbre équation de Korteweg-DeVries ainsi que les équations de Boussinesq, sont étudiés dans [Lan13].

1.3 L'approximation modulationnelle dans le régime faiblement non-linéaire

Dans cette section, nous définissons le régime faiblement non-linéaire et nous donnons une description plus détaillée, mais toujours informelle, de la démarche de l'approximation modulationnelle. Celle-ci permet d'obtenir les modèles asymptotiques de type Benney-Roskes / Davey-Stewartson qui ont été introduits dans la section 1.1.

1.3.1 Le régime faiblement non-linéaire

Dans ce qui suit, nous sommes intéressés par le régime d'ondes de faible amplitude en eau assez profonde, mais de profondeur finie. Quant aux paramètres caractéristiques des ondes de surface, ce régime est décrit en supposant que $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ pour $\mu_0 > 0$ et $\mu_1 < \infty$, et en supposant que $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre.

Revenons maintenant vers les équations des ondes de surface sous forme non-dimensionnelle (1.30). Puisque nous supposons que μ est borné inférieurement par une constante positive, nous avons $\nu = O(\mu^{-1/2})$. Pour faciliter les notations par la suite, nous mettons $\nu = \mu^{-1/2}$. Nous introduisons le petit paramètre $\epsilon = \varepsilon\sqrt{\mu} \ll 1$. Avec la définition de ε et μ , nous obtenons $\epsilon = \frac{a}{L_x}$. ϵ est donc une mesure de la "raideur" du profil d'onde. En outre, nous prenons $\gamma = 1$.⁶

⁶En fait, nous supposons plutôt $\gamma = c$ pour une constante qui ne dépend pas des autres paramètres (contrairement par exemple au régime faiblement transversale $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ pour $\varepsilon \ll 1$). La valeur $c = 1$ est choisi pour faciliter les notations par la suite. On peut toujours ce ramener à ce cas par un changement de variables $y \rightarrow \gamma y$.

On peut alors réécrire les équations des ondes de surface (1.30) uniformément par rapport à ϵ

$$\begin{cases} \zeta_t - \mathcal{G}\psi = 0, \\ \psi_t + \zeta + \frac{\epsilon}{2}|\nabla\psi|^2 - \epsilon \frac{(\mathcal{G}\psi + \epsilon \nabla\zeta \cdot \nabla\psi)^2}{2(1 + \epsilon^2|\nabla\zeta|^2)} = -\beta \frac{\kappa(\epsilon\zeta)}{\epsilon}, \end{cases} \quad (1.33)$$

où nous avons introduit la notation

$$\mathcal{G}\psi = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathcal{G}_{[\mu,1]}[\varepsilon\zeta]\psi.$$

Il est connu que l'opérateur de DN \mathcal{G} admet un développement asymptotique homogène en ϵ sous forme

$$\mathcal{G} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathcal{G}_j,$$

où les \mathcal{G}_j sont des opérateurs pseudo-différentiels à coefficients constants qui peuvent être calculés explicitement (voir section 2.1.3). Le premier opérateur du développement est donné par

$$\mathcal{G}_0 = |D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|).$$

Les équations des ondes de surface représentent alors un problème faiblement non-linéaire par rapport à ϵ , c'est-à-dire ils sont de la forme

$$U_t + \mathcal{L}U = \epsilon \mathcal{N}(U),$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire et \mathcal{N} une fonction non-linéaire. Ici, $U = (\zeta, \psi)^T$ et

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{G}_0 \\ 1 - \beta\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}_0}{\epsilon} \\ -\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{(\mathcal{G}\psi + \epsilon \nabla\zeta \cdot \nabla\psi)^2}{2(1 + \epsilon^2|\nabla\zeta|^2)} - \beta \frac{\kappa(\epsilon\zeta) + \Delta(\epsilon\zeta)}{\epsilon^2} \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

1.3.2 L'approximation modulationnelle

Par des calculs analogues à ceux de la section 1.2.2, on voit que le modèle linéaire sous forme non dimensionnelle $\partial_t U_0 + \mathcal{L}U_0 = 0$, où \mathcal{L} est défini dans (1.34), admet des solutions sous forme d'ondes planes

$$U_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} i \frac{\omega}{\vartheta} A \\ A \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{R}$, $\vartheta = \vartheta(\mathbf{k}) = 1 + \beta|\mathbf{k}|^2$ et

$$\omega^2 = \omega(\mathbf{k})^2 = |\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(\beta|\mathbf{k}|^2 + 1). \quad (1.35)$$

Le système non-linéaire étant proche du système linéaire pour $\epsilon \ll 1$, une idée naturelle consiste à chercher des solutions de celui-ci proche de U_0 . Il est bien connu qu'il est convenable de choisir un ansatz sous forme

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, \mathbf{x}) = & \begin{pmatrix} i \frac{\omega}{\vartheta} A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \\ A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} + \epsilon U_1(t, \mathbf{x}; \epsilon) + \\ & + \epsilon^2 U_2(t, \mathbf{x}; \epsilon) + \dots + \epsilon^n U_n(t, \mathbf{x}; \epsilon), \end{aligned} \quad (1.36)$$

où A et B ne sont plus constantes mais lentement modulée par rapport aux variables de temps et d'espace. Ceci permet de modéliser l'influence des termes non-linéaires $\mathcal{N}(U)$ sur la propagation de l'onde plane. On essaye ensuite de déterminer A , B et les correcteurs U_j telles que \tilde{U} est approximativement une solution du système non-linéaire dans le sens que (formellement)

$$\tilde{U}_t + \mathcal{L}\tilde{U} - \epsilon\mathcal{N}(\tilde{U}) = \epsilon^{n+1}\mathcal{R}(\tilde{U}).$$

D'ailleurs, on peut vérifier facilement qu'il n'est pas convenable de garder A et B constantes dans l'ansatz (1.36), car ce choix ferait apparaître des termes qui croissent comme $O(t)$ - des termes séculaires - dans l'expression de U_1 . Ceci est dû à la création de termes résonants par la non-linéarité. Un argument de conservation d'énergie montre qu'une telle approche ne peut pas fournir une bonne approximation pour des temps grands. En effet, la présence de termes séculaires implique une croissance linéaire de l'énergie de \tilde{U} , tandis que l'énergie de la vraie solution (celle étant initialement proche de \tilde{U}) est conservée et reste donc bornée.

La forme des U_j dans (1.36) est déterminée en injectant cette approche dans les équations des ondes de surface (1.33). On verra alors que les termes non-linéaires créent des oscillations harmoniques d'ordre supérieur, donc il est convenable de chercher les termes correcteurs sous forme

$$U_j = \sum_m U_{jm}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{im(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + c.c. + U_{j0}.$$

On injecte également les développements asymptotiques de \mathcal{G} et κ ,

$$\mathcal{G} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathcal{G}_j, \quad \kappa = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \kappa_j,$$

dans le système des ondes de surface (1.33), et on regroupe les termes du même ordre j en ϵ . Ensuite, on choisit A , B et les U_{jm} de sorte à annuler ces termes pour $0 \leq j \leq n$, tout en évitant de faire apparaître des termes séculaires. Ainsi, on obtient les systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson donnés dans la section 1.1. Les U_{jm} dépendront uniquement de A et B et, éventuellement, $U_{10} = P_0$ et de leurs dérivées, donc la solution approchée \tilde{U} est complètement décrite en résolvant les systèmes de BR / DS.

La différence dans le calcul du système de BR classique (1.5) et de sa version "full dispersion" (1.6) vient de la manière de développer la partie linéaire. Au cours de l'analyse modulationnelle, il faut traiter des termes où l'opérateur linéaire \mathcal{L} (défini dans (1.34)) agit sur des paquets d'ondes faiblement modulés sous forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|) \\ 1 - \beta\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{\omega}{\mathcal{G}} A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \\ A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

En particulier, il faut calculer l'action de l'opérateur pseudo-différentiel $|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)$ sur les paquets d'ondes. Classiquement, cet opérateur est approché par des opérateurs différentiels : Par un passage en domaine de Fourier on obtient (omettant la variable temporelle car l'opérateur n'agit que sur \mathbf{x})

$$\begin{aligned} |D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|) [A(\epsilon \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} |\xi| \tanh(\sqrt{\mu}|\xi|) \frac{1}{\epsilon^d} \hat{A}\left(\frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon}\right) d\xi \\ &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\epsilon \mathbf{x} \cdot \xi} |\epsilon \xi + \mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\epsilon \xi + \mathbf{k}|) \hat{A}(\xi) d\xi \\ &= |\mathbf{k} + \epsilon D'| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k} + \epsilon D'|) A|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

où $D = -i\nabla_{\mathbf{x}}$ et $D' = -i\nabla_{\mathbf{X}}$ avec $\mathbf{X} = \epsilon\mathbf{x}$.

A l'aide d'un développement de Taylor de $|\mathbf{k} + \epsilon D'| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k} + \epsilon D'|)$ autour de \mathbf{k} on peut approcher cette fonction par un polynôme, et donc l'opérateur pseudo-différentiel par un opérateur différentiel standard.

Selon une observation de David Lannes, il n'est pas nécessaire de faire cette approximation. Si on garde l'action exacte de \mathcal{L} sur les termes principales de \tilde{U} , on obtient un système asymptotique qui a la même structure que le système de BR classique⁷ mais qui préserve (voir remarque 1.3.3) la relation de dispersion linéaire des équations des ondes de surface.

L'approximation modulationnelle est effectuée en détail dans le deuxième chapitre de cette thèse.

Remarques sur la justification d'un modèle asymptotique

La déduction des modèles de BR / DS par la méthode décrite ci-dessous est purement formelle. En particulier, elle ne permet pas de déterminer la taille de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée. Pour prouver la validité de l'approximation modulationnelle, il faut en plus calculer ou estimer rigoureusement cette erreur et démontrer qu'elle est petite. Ce problème n'est pas abordé dans cette thèse, mais à cause de son importance dans le contexte des modèles asymptotiques nous définissons brièvement ce qu'on entend par un modèle rigoureusement justifié.

Definition 1 (Modèle asymptotique justifié). *On dit qu'un modèle asymptotique est justifié rigoureusement sur un intervalle de temps approprié $[0, \mathcal{T}]$ si on a démontré que*

1. *Les équations des ondes de surface sont bien posées sur cet intervalle de temps.*
2. *La solution approchée définie par le modèle asymptotique existe sur cet intervalle.*
3. *L'erreur entre la solution exacte U et la solution approchée \tilde{U} avec données initiales correspondantes reste petite sur $[0, \mathcal{T}]$, c'est-à-dire on a une estimation sous forme*

$$\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|U(t, \cdot) - \tilde{U}(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \lesssim \epsilon^r,$$

où \mathcal{H} est un espace fonctionnel approprié (d'habitude un espace de Sobolev) et $r > 0$.

Les modèles de Benney-Roskes / Davey-Stewartson décrivent l'évolution de l'amplitude du paquet d'onde sur une échelle de temps $\mathcal{T} = O(\epsilon^{-2})$. Afin de justifier ces modèles, il faudrait donc tout d'abord démontrer que les équations des ondes de surface sont bien posées sur cette échelle pour des données initiales de petite amplitude $O(\epsilon)$. Un tel théorème n'est pas disponible actuellement, du moins pour le cas de profondeur finie.⁸ Le temps d'existence connu dans un espace de Sobolev est d'ordre $O(\epsilon^{-1})$ (voir les résultats mentionnés dans la section 1.4.1). Sur cette échelle de temps, l'amplitude de l'onde plane est principalement translatée à vitesse de groupe et on ne peut pas encore distinguer le comportement décrit par les système de BR / DS.

Quant à la question d'existence de solutions des modèles de BR / DS sur un intervalle de temps approprié, celle-ci est résolue pour le système de DS standard, mais pas pour le système de BR. En effet, puisque les enveloppes A et B sont données en fonction de la variable lente $\tau = \epsilon^2 t$ dans le cas de l'approximation de DS, il est suffisant de démontrer l'existence locale pour décrire la dynamique du paquet d'onde en temps long $O(\epsilon^{-2})$. Des tels théorèmes sont disponibles et nous en donnons

⁷Ceci vient du fait que l'action de $|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)$ sur le paquet d'ondes $A(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ préserve la structure de celui-ci, c'est-à-dire on obtient de nouveau un paquet d'ondes sous forme $B(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, où $B = |\mathbf{k} + \epsilon D'| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k} + \epsilon D'|)A$.

⁸L'approximation modulationnelle a été justifiée en profondeur infinie, voir la section 1.4.2.

quelques références dans la prochaine section ainsi que dans le chapitre 4 de cette thèse. En ce qui concerne le système de DS "full dispersion", la théorie locale est plus compliquée et on ne peut résoudre le système que dans quelques cas particuliers. Ceci sera expliqué en détail dans le quatrième chapitre.

Dans l'approximation de BR, les enveloppes sont considérées comme fonctions de la variable $T = \epsilon t$, donc il faut démontrer l'existence de solutions sur une échelle $T = O(\epsilon^{-1})$ pour justifier l'approximation sur $t = O(\epsilon^{-2})$. Pour l'instant, seulement l'existence locale (donc $T = O(1)$) est connue pour le système de BR standard ainsi que pour la variante "full dispersion". La théorie locale pour BR "full dispersion" sera traitée dans le troisième chapitre.

1.3.3 Remarques sur les systèmes de Benney-Roskes / Davey-Stewartson

Nous rappelons tout d'abord l'expression des systèmes de Benney-Roskes et Davey-Stewartson. Le système de Benney-Roskes "full dispersion" (FDBR) est donné par

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon[|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P_0 + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P_0 - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} B = -2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2, \end{cases} \quad (1.37)$$

où $P_0 = U_{10}$, $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre, la relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$ est définie dans (1.35), et les constantes ϑ , γ_1 et γ_2 ne dépendent que de la norme du nombre d'onde $|\mathbf{k}|$, du paramètre de profondeur d'eau μ et du coefficient de la tension superficielle β . Nous rappelons également la définition (1.7) des opérateurs non-locaux.

Le système de Benney-Roskes standard (BR) est donné par

$$\begin{cases} \partial_T A + \omega' \partial_X A - i \frac{\epsilon}{2} (\omega'' A_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} A_{YY}) + i\epsilon[|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P_0 + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P_0 + \sqrt{\mu} \Delta B = -\frac{2\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -\frac{2\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2, \end{cases} \quad (1.38)$$

. où

$$\omega' = \frac{d\tilde{\omega}}{dr} \Big|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \omega'' = \frac{d^2 \tilde{\omega}}{dr^2} \Big|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \text{avec } \tilde{\omega}(r) = [r \tanh(\sqrt{\mu} r) (1 + \beta r^2)]^{1/2}.$$

Finalement, le système de Davey-Stewartson full dispersion s'écrit

$$\begin{cases} \partial_\tau A + \frac{i}{\epsilon^2} (\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k}) - \epsilon \omega' D_X) A + i[\lambda_1 \partial_X B + \lambda_2 |A|^2] A = 0, \\ (\omega')^2 \partial_{XX} B + |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} B - 2 \frac{\omega}{\vartheta} \lambda_1 \partial_X |A|^2 = 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

où $\tau = \epsilon T$, $D_X = -i \partial_X$ et les constantes λ_1 et λ_2 ne dépendent que de $|\mathbf{k}|$, μ et β .

Dans cette section nous réunissons quelques remarques sur les systèmes de BR / DS.

Remark 1.3.1 (Systèmes canoniques). Des systèmes de type BR et DS sont des modèles universels qui apparaissent non seulement dans le contexte des équations des ondes de surface, mais également pour d'autres problèmes physiques où on modélise l'évolution en temps d'un paquet d'onde se propageant dans une direction et dont l'amplitude est lentement modulée. Une discussion du caractère

canonique du système de DS est par exemple donnée dans le dixième chapitre de [SS99], où les auteurs obtiennent en outre un système de type DS par une approximation modulationnelle des équations de Kadomtsev-Petviashvili. Quelques références se trouvent aussi dans un papier de Colin [Col02], où les systèmes de DS sont déduits et justifiés comme modèles asymptotiques pour certains systèmes hyperboliques à non-linéarité quadratique (voir également [CL04]).

Les systèmes de DS standard ont la forme générale

$$\begin{cases} iA_\tau + aA_{XX} + A_{YY} = (\nu_1 B_X + \nu_2 |A|^2)A, \\ B_{XX} + bB_{YY} = -\delta |A|_X^2, \end{cases}, \quad (1.40)$$

où les coefficients dépendent de l'équation dont le système a été déduit. Selon le signe des coefficients (a, b) , les systèmes de DS sont classifiés comme elliptique-elliptique $(+, +)$, elliptique-hyperbolique $(+, -)$, hyperbolique-elliptique $(-, +)$ et hyperbolique-hyperbolique $(-, -)$. Le cas hyperbolique-hyperbolique n'apparaît pas dans le contexte des ondes de surface.

Un système identique aux équations de Benney-Roskes a été introduit indépendamment par Zakharov et Rubenchik [ZR72] pour modéliser l'interaction d'un paquet d'ondes de haute fréquence avec une oscillation acoustique de basse fréquence. Le système de Zakharov-Rubenchik en dimension 1+2 est donné par

$$\begin{cases} i\partial_t \psi + i\omega' \partial_x \psi + \frac{\omega''}{2} \partial_x^2 \psi + \frac{\omega'}{2|\mathbf{k}|} \partial_y^2 \psi - (\alpha \partial_x \varphi + \beta \rho + q|\psi|^2) \psi = 0, \\ \partial_t \rho + \rho_0 \Delta \varphi + \alpha \partial_x |\psi|^2 = 0, \\ \partial_t \varphi + \frac{c^2}{\rho_0} \rho + \beta |\psi|^2 = 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

où ψ désigne l'amplitude complexe de l'onde de haute fréquence dont le nombre d'onde $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_x$ et la fréquence ω sont liées par une relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$. ρ et ϕ désignent respectivement la variation de la densité et le potentiel hydrodynamique.

Remark 1.3.2 (Théorie d'existence de solutions). La théorie d'existence pour les systèmes de BR et DS sera présentée d'une manière plus détaillée en chapitres 3 et 4 de cette thèse, où nous étudions les systèmes "full dispersion".

Ici, nous indiquons quelques références aux travaux existants. Il existe assez peu de résultats pour le système de Benney-Roskes. Le problème de Cauchy en dimension 1 + 2 pour le système de BR standard (1.38) a été étudié par Ponce et Saut [PS05]. Les auteurs démontrent l'existence locale de solutions dans un espace de Sobolev. Par contre, leur méthode ne fournit pas l'existence sur l'échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-1})$ qui est nécessaire pour justifier l'approximation de BR. En dimension 1+1, Serra de Oliveira [Ser03] démontre l'existence globale de solutions dans un espace de Sobolev (voir également [LM⁺09]).

Les travaux de recherche concernant les systèmes de Davey-Stewartson sont beaucoup plus nombreux et nous ne fournissons pas une liste exhaustive de résultats ici. Le problème du Cauchy pour les systèmes de DS a été étudié par Ghidaglia et Saut dans [GS90]. Ils démontrent l'existence locale (et parfois globale) des solutions dans un espace de Sobolev dans les cas elliptique-elliptique et hyperbolique-elliptique, et ils traitent le blow-up pour le cas elliptique-elliptique. Linares et Ponce [LP93] traitent les cas elliptique-hyperbolique et hyperbolique-hyperbolique et démontrent l'existence locale pour petites données initiales dans un espace de Sobolev à poids. Hayashi [Hay97] arrive à enlever la condition de petites données dans le cas elliptique-hyperbolique. Le problème de Cauchy est également traité dans [C⁺99], [HS⁺95], [HH96].

Des références supplémentaires se trouvent dans le quatrième chapitre de cette thèse.

Remark 1.3.3 (Relation de dispersion de FDBR). Une onde plane $A = ae^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega_{FD} t)} = ae^{i\epsilon(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega_{FD} t)}$ est solution de la partie linéaire du système de Benney-Roskes "full dispersion" (1.6) si

$$\omega_{FD}(\mathbf{k}') = \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon \mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}, \quad (1.42)$$

où nous rappelons que la relation de dispersion des ondes de surface $\omega(\mathbf{k})$ est définie par (1.35). En vu de la relation $\zeta_0 = i\frac{\omega}{\vartheta} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)}$ liant la solution ζ_0 des équations des ondes de surface linéarisées et la solution A du système de FDBR, on a grâce à (1.42)

$$\zeta_0 = i\frac{\omega}{\vartheta} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} = i\frac{\omega}{\vartheta} a e^{i((\mathbf{k} + \epsilon \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - (\omega(\mathbf{k}) + \epsilon \omega_{FD}(\mathbf{k}'))t)} = i\frac{\omega}{\vartheta} a e^{i((\mathbf{k} + \epsilon \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k} + \epsilon \mathbf{k}')t)}.$$

Le système de BR "full dispersion" décrit donc d'une manière exacte le comportement dispersif du système des ondes de surface linéaire.

Remark 1.3.4 (L'intérêt de l'approximation "full dispersion"). La relation de dispersion du système de Benney-Roskes classique est obtenue en calculant le développement asymptotique d'ordre 2 de $\omega_{FD}(\mathbf{k}')$ définie en (1.42) autour de \mathbf{k} . Pour des grandes fréquences $|\mathbf{k}'| = O(\frac{1}{\epsilon})$, cette approximation n'est plus précise. On peut donc s'attendre à ce que l'approximation de BR classique n'est plus valable quand le spectre des fréquences des données initiales est très large, contrairement au système de BR "full dispersion" qui décrit exactement le comportement dispersif.

Une étude comparant l'approximation modulationnelle classique avec l'approche "full dispersion" est disponible pour l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$\partial_t A + \omega' \partial_x A - \epsilon \frac{i}{2} \mathcal{R}(\partial, \partial) A = \epsilon F(A),$$

où \mathcal{R} est un opérateur différentiel d'ordre 2 et F une fonction non-linéaire. L'équation de Schrödinger non-linéaire est un des modèles asymptotiques qui apparaissent de façon canonique dans l'approximation modulationnelle des problèmes physiques. Dans le cas des équations des ondes de surface, l'équation de Schrödinger cubique est modèle asymptotique en profondeur infinie. En profondeur finie et pour un écoulement en espace de dimension 2, le système de DS se réduit également à une équation de Schrödinger non-linéaire.

L'équation de Schrödinger "full dispersion" est donnée par

$$\partial_t A + \frac{i}{\epsilon} (\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})) A = \epsilon F(A).$$

Dans leur papier [CL09], Colin et Lannes comparent la validité des modèles de Schrödinger non-linéaire standard et "full dispersion" dans la modélisation des pulsations de très haute fréquence émises par un laser. Ces pulsations ont une amplitude initiale sous forme

$$A_0(\mathbf{x}) = f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\beta}\right),$$

où f est une fonction régulière et $\epsilon \ll \beta \ll 1$ ou encore $\beta = O(\epsilon)$. Leur étude, qui est complétée par des résultats numériques, indique que l'erreur d'approximation est grande pour l'équation de Schrödinger standard, tandis que le modèle "full dispersion" reste valable.

Remark 1.3.5 (Différence entre l'approximation de BR et de DS). Comme mentionné dans [Lan13] (remarque 8.23), l'approximation de BR est plus générale que celle de DS, car pour cette dernière les conditions initiales doivent être bien préparées dans le sens que la deuxième équation de (1.39)

ou (1.40) doit être satisfait en $\tau = 0$.

Par contre, le système de DS a l'avantage de décrire l'évolution de A et B en fonction de la variable lente $\tau = \epsilon^{-2}t$. Ainsi, il est suffisant de démontrer que le système de DS est bien posé localement pour conclure que l'approximation est consistante aux équations des ondes de surface sur l'échelle de temps appropriée $O(\epsilon^{-2})$.

D'ailleurs, pour des données initiales bien préparées, l'erreur de consistance est de la même taille pour ces deux systèmes (BR et DS) sur l'échelle de temps $O(\epsilon^{-2})$.⁹ Si on suppose que le système des ondes de surface est stable par rapport aux petites perturbations,¹⁰ on s'attend à ce que la précision d'approximation soit la même pour ces deux systèmes. Par contre, pour des données initiales générales, il a été démontré dans [CL04] que l'approximation de DS est moins précise que celle de BR.

1.4 Résultats existants

1.4.1 Existence de solutions aux équations des ondes de surface

Comme mentionné précédemment, la justification rigoureuse de l'approximation modulationnelle des équations des ondes de surface nécessiterait un résultat d'existence pour les équations exactes sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-2})$ pour des ondes de faible amplitude. Un tel résultat n'est pas disponible actuellement, du moins dans le cas de profondeur finie. En profondeur infinie, il a été démontré que les équations des ondes de surface sont bien posées globalement pour des petites données initiales. En profondeur finie, il est connu que les solutions existent sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-1})$.

En ce qui concerne la théorie locale, les résultats sont très nombreux, grâce à la structure riche du problème des ondes de surface. Nous donnons une liste non-exhaustive des travaux ici.

Les premiers travaux qui traitent le problème d'existence locale des ondes de surface dans les espaces de Sobolev sont entre autres ceux de Nalimov [Nal74], Yosihara [Yos82], [Yos83], et Craig [Cra85]. Nalimov démontre l'existence locale des ondes de surface de faible amplitude dans un espace de Sobolev, pour un écoulement en espace de dimension 2, dans le cas de profondeur infinie et sans tension de surface. Yosihara adapte le travail de Nalimov au cas de profondeur finie (pour un fond variable) et traite également le cas avec tension de surface. Leur méthode est restreinte aux ondes de faible amplitude et basée sur un quasi-linéarisation des équations d'Euler à surface libre. Craig démontre que les équations sont bien posées dans les scalings de Boussinesq et KdV. L'existence de solutions analytiques a été démontrée par exemple par Ovsjannikov [Ovs76], Reeder et Shinbrot [Shi76], [RS76], Kano et Nishida [KN⁺79].

La preuve du fait que les équations des ondes de surface sont bien posées sans la restriction de faible amplitude restait un problème ouvert pendant quelque temps. Ce problème important est finalement résolu par S. Wu. Elle démontre l'existence locale dans un espace de Sobolev, pour un écoulement en profondeur infinie et sans tension de surface (en 2D : [Wu97], en 3D : [Wu99]). Elle traite également le cas de petites données initiales, où elle démontre l'existence presque globale en dimension 2 [Wu09], et l'existence globale en dimension 3 [Wu11], toujours en profondeur infinie et sans tension de surface. L'existence globale en dimension 3 pour des petites données initiales a été également démontrée par Germain, Masmoudi et Shatah [GMS09] par une autre méthode que celle de Wu (voir [GMS12] où l'existence globale pour des ondes en dimension 3 avec tension de surface est démontrée). En dimension 2, Alazard / Delort [AD13] et Ionescu / Pusateri [IP] démontrent indépendamment

⁹Voir les calculs dans le deuxième chapitre de cette thèse.

¹⁰Ceci est démontré par exemple dans le théorème 4.18 de [Lan13] sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-1})$.

l'existence globale pour des petites données initiales. D'autres références en profondeur finie sont [ABN12, CCG10, IP14, ZZ08].

En profondeur finie, D. Lannes [Lan05] démontre l'existence locale de solutions sans la restriction de petites données initiales, en dimension d'espace arbitraire et sans tension de surface. La preuve est basée sur une analyse approfondie des propriétés de régularité de l'opérateur de Dirichlet-Neumann, et ainsi l'obtention des estimations "douces" qui permettent de résoudre les équations des ondes de surface par un schéma d'itération de Nash-Moser. Iguchi [Igu06] arrive à améliorer les estimation de Lannes de sorte que l'application du théorème de Nash-Moser n'est plus nécessaire. Pour les équations des ondes de surface sous forme non-dimensionnelle (1.30), Lannes démontre ([ASL08], voir également [Lan13]) que les équations sont bien posées sur une échelle de temps d'ordre $O(1/\varepsilon(1+\sqrt{\mu}))$ ce qui donne l'existence en temps long si ε est petit. Le cas de tension de surface non-nulle est considéré dans [MZ09].

Il existe de nombreux autres travaux concernant les équations d'Euler à surface libre, voir par exemple [ABZ⁺11, ABZ14] pour des domaines de fluide à faible régularité, ou [Lin05, CL00, CS07, Sch05, SZ08] pour de fluides sans la condition d'écoulement irrotationnel.

1.4.2 Résultats sur la justification des modèles asymptotiques dans l'approximation modulationnelle

Comme remarqué dans la section 1.3.2, la justification complète de l'approximation de Benney-Roskes / Davey-Stewartson en profondeur finie reste un problème ouvert. Le premier résultat dans cette direction a été obtenu par Craig, Sulem et Sulem [CSS97] pour le système de DS standard. Les auteurs calculent le développement asymptotique de l'opérateur de Dirichlet-Neumann \mathcal{G} et donnent des estimations d'erreur rigoureuses pour le résidu du développement. Ceci leur permet de démontrer que l'approximation de DS est consistante aux équations des ondes de surface, c'est-à-dire que la solution approchée \tilde{U} définie par l'approximation modulationnelle satisfait¹¹

$$\tilde{U}_t + \mathcal{L}\tilde{U} - \epsilon\mathcal{N}(\tilde{U}) = \mathcal{R}(\tilde{U}),$$

avec un résidu \mathcal{R} dont la norme est petite. Plus précisément, la norme du résidu est d'ordre $O(\epsilon^2)$ à condition que \tilde{U} soit suffisamment régulière. La consistance du système de Benney-Roskes "full dispersion" est étudiée dans [Lan13], et dans [Obr14] où l'effet de tension de surface est pris en compte. Nous en revenons au deuxième chapitre de cette thèse.

En cas d'un fluide de profondeur infinie, l'approximation modulationnelle est complètement justifiée. Rappelons qu'actuellement la justification en profondeur finie n'est pas possible car il manque un théorème qui fournit l'existence de solutions aux équations des ondes de surface sur une échelle de temps d'ordre $O(\epsilon^{-2})$. Dans le cas de profondeur infinie par contre, la théorie d'existence globale ou presque globale des solutions à petites données initiales est plus complète (voir la section précédente), ce qui a permis la justification de l'approximation modulationnelle.

Le modèle asymptotique qu'on obtient en profondeur infinie est une équation de Schrödinger cubique (en dimension 1+1 ainsi qu'en dimension 1+2). Le modèle a été justifié en dimension 1+1 par Totz et Wu [TW12], et ce résultat a été généralisé par Totz au cas de dimension supérieure dans [Tot13].

¹¹Nous rappelons que les équation exactes sont données par $U_t + \mathcal{L}U = \epsilon\mathcal{N}(U)$, avec \mathcal{L} et \mathcal{N} définis dans (1.34).

Chapter 2

Derivation and consistency of the full dispersion Benney-Roskes system

In this chapter we will derive the full dispersion Benney-Roskes system as an asymptotic model to the water wave equations by a modulational analysis as described in section 1.3.2 of the introduction. This system was first derived in the zero surface tension case $\beta = 0$ by D. Lannes in [Lan13]. We consider here the general case $\beta \geq 0$. The results of this chapter have been published in [Obr14]. This chapter is organized as follows. In section 2.1 we recall the equations of motion of the nondimensionalized water wave problem and give some results about the asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator. Section 2.2 is devoted to the formal construction of an asymptotic solution to the water wave equations by a modulational analysis. During this analysis we immediately keep track of the error by systematically giving estimates on the residual terms of all expansions performed. We will see that the asymptotic solution is defined by the Benney-Roskes full dispersion system.

In section 2.3 we give a result on consistency of the FDBR model with the full water wave equations.

2.1 Preliminaries

2.1.1 Notations

Variables

The time variable is denoted by t . Horizontal and vertical space variables are denoted by $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ with $d = 1, 2$ and $z \in \mathbb{R}$ respectively (see also figure 1.1).

Derivatives

The partial derivative of a function f with respect to some variable x is denoted by $\partial_x f$ or f_x . $\partial_{\mathbf{n}} f$ designates the normal derivative with respect to some surface. The gradient of a function $g = g(t, \mathbf{x})$ with respect to \mathbf{x} is denoted by ∇ or $\nabla_{\mathbf{x}}$. When acting on a multi-scale function $g(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, then we write $\nabla_{\mathbf{x}} g = \nabla g + \epsilon \nabla' g$, such that ∇ designates the gradient of g with respect to the first variable \mathbf{x} and ∇' denotes the gradient of g with respect to \mathbf{x}' .

Function spaces

We denote by $L^p(\mathbb{R}^d)$ Lebesgue spaces of complex valued functions on \mathbb{R}^d for $d = 1, 2$ and $1 \leq p < \infty$. $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ designates the space of (measurable) functions with bounded supremum norm. Sobolev spaces are denoted by $W^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ for $s \in \mathbb{N}_0$ and $1 < q < \infty$ with the usual special case $W^{s,2}(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$. The space of n times continuously differentiable functions is denoted by $C^n(\mathbb{R}^d)$. The norm of a Banach space X is denoted by $|\cdot|_X$.

The Fourier transform of a function $f(\mathbf{x})$ is denoted by

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

We use the usual characterization of Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ by means of the Fourier transform, i.e. for $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : |f|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}.$$

Furthermore, the homogeneous Sobolev space $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ is defined by

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : |f|_{\dot{H}^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}.$$

For estimates

We will use the notation $s_1 \vee s_2 := \max\{s_1, s_2\}$.

We write $A \lesssim B$ if there is some constant C such that $A \leq CB$.

We often use inequalities of the form $A \leq C(B_1, \dots, B_n)$ where $C(B_1, \dots, B_n)$ is some unspecified continuous (usually polynomial) function.

$A \sim 1$ means that there are some positive constants A_0, A_1 such that $A_0 \leq A \leq A_1$.

2.1.2 Equations of motion

We will derive the FDBR system from the Craig-Sulem-Zakharov formulation of the water wave equations. We recall from section 1.3.1 of the introduction that these equations are given by

$$\begin{cases} \zeta_t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathcal{G}\psi = 0, \\ \psi_t + \zeta + \frac{\epsilon}{2} |\nabla \psi|^2 - \epsilon \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathcal{G}\psi + \epsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \psi \right)^2}{2(1 + \epsilon^2 |\nabla \zeta|^2)} = -\beta \frac{\kappa(\epsilon \zeta)}{\epsilon}, \end{cases} \quad (2.1)$$

where $\zeta(t, \mathbf{x})$ is the elevation of the free surface and $\psi(t, \mathbf{x})$ the value of the velocity potential at the free surface. The steepness parameter

$$\epsilon = \frac{a}{L_x} = \frac{\text{typical amplitude}}{\text{typical wave length}}$$

is assumed to be small $\epsilon \ll 1$. Furthermore, $\mu \sim 1$ is the shallowness parameter, and $\beta \geq 0$ the inverse of the Bond number which measures the effect of surface tension (cf. the definition of these parameters in (1.29)). $\kappa(\zeta) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \right)$ denotes the mean curvature of the free surface. The Dirichlet-Neumann operator is defined by

$$\mathcal{G}\psi = -\mu \nabla(\epsilon \zeta) \cdot \nabla \phi|_{z=\epsilon \zeta} + \partial_z \phi|_{z=\epsilon \zeta}, \quad (2.2)$$

where $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ for $d = 2$ and $\nabla = \partial_x$ for $d = 1$, and ϕ satisfies the Laplace equation on the fluid domain

$$\begin{cases} \Delta^\mu \phi = 0 & -1 \leq z \leq \epsilon \zeta, \\ \phi|_{z=\epsilon \zeta} = \psi, & \partial_z \phi|_{z=-1} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

where $\Delta^\mu = \mu \nabla \cdot \nabla + \partial_z^2$.

In the following we will construct formal asymptotic solutions to (2.1) by expanding the equation for small $\epsilon \ll 1$, and we will study their consistency with the full water wave system. For this, we will need some results on the asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator which will be given in the next section.

2.1.3 Asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator

An asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator for small amplitude waves has been calculated by W. Craig, C. Sulem and U. Schanz in [CSS92] and [CSS97] in three dimensional space (i.e. for a free surface of dimension $d = 2$). In these papers, the authors consider the "dimensional" form of the Dirichlet-Neumann operator in the case of a flat bottom $z = -H_0$, i.e. the operator

$$\mathcal{G}_{dim}(\eta)\psi = -\nabla\eta \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi|_{z=\eta} + \partial_z\phi|_{z=\eta}$$

where ϕ satisfies the Laplace equation

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & -H_0 \leq z \leq \eta, \\ \phi|_{z=\eta} = \psi, & \partial_z\phi|_{z=-H_0} = 0. \end{cases}$$

Here, we denote the free surface elevation by η to differentiate it from the normalized elevation ζ . Recall that we have the relation $\zeta = \eta/a$ where a is the typical amplitude of the wave.

Craig, Schanz and Sulem show that, for η lying in a neighborhood of zero with respect to the $C^1(\mathbb{R}^2)$ topology and such that $|\eta|_{C^{s+1}(\mathbb{R}^2)} < \infty$, the operator \mathcal{G}_{dim} is analytic in η as a mapping $\mathcal{G}_{dim} : W^{s+1,q}(\mathbb{R}^2) \rightarrow W^{s,q}(\mathbb{R}^2)$ for $1 < q < \infty$. They calculate the analytic expansion of \mathcal{G}_{dim} and show that the operator can be written as

$$\mathcal{G}_{dim} = \mathcal{G}_{dim}^0 + \mathcal{G}_{dim}^1(\eta) + \mathcal{G}_{dim}^2(\eta) + R_3(\eta)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{dim}^0 &= |D| \tanh(H_0|D|), \\ \mathcal{G}_{dim}^1 &= -\mathcal{G}_{dim}^0(\eta(\mathcal{G}_{dim}^0 \cdot)) - \nabla \cdot (\eta \nabla \cdot), \\ \mathcal{G}_{dim}^2 &= \mathcal{G}_{dim}^0(\eta \mathcal{G}_{dim}^0(\eta \mathcal{G}_{dim}^0 \cdot)) + \frac{1}{2} \Delta(\eta^2 \mathcal{G}_{dim}^0 \cdot) + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{dim}^0(\eta^2 \Delta \cdot), \end{aligned}$$

and an explicit expression of the remainder R_3 . They derive estimates for R_3 as well as for the lower order remainders $R_n = \mathcal{G}_{dim} - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}_{dim}^j$, $n = 1, 2$ as follows

Theorem 2.1.1 (Craig, Schanz, Sulem). *Consider $1 < q < \infty$ and $0 \leq s \in \mathbb{N}$. Let $|\eta|_{C^1(\mathbb{R}^2)} < R_0$ and $|\eta|_{C^{s+1}(\mathbb{R}^2)} < \infty$. The Taylor remainders $R_n(\eta)$ from the expansion of \mathcal{G}_{dim} , $n = 1, 2, 3$ satisfy*

$$|R_n(\eta)\psi|_{s,q} \leq C(s)|\eta|_{C^1}^{n-1}(|\eta|_{C^1}|\psi|_{s+1,q} + |\eta|_{C^{s+1}}|\psi|_{1,q}).$$

Craig and Nicholls [CN00] extend this result to the general two or three dimensional case, with lower regularity assumptions on η . They show that for $1 < q < \infty$, $s > \max(d/q, d+1)$ and $\eta \in W^{s+d,q}(\mathbb{R}^d)$ the Dirichlet-Neumann operator $\mathcal{G}_{dim}(\eta)$ is a bounded linear operator from $W^{s+1,q}(\mathbb{R}^d)$ to $W^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ which is analytic as a function of η .

The expansion of the nondimensionalized Dirichlet-Neumann operator \mathcal{G} defined in (2.2) - (2.3) has been derived by D. Lannes in [ASL08] by using the shape derivative of the DN-operator. In

[Lan13] he shows that, for any $t_0 > d/2$ and $\zeta \in H^{t_0+1}(\mathbb{R}^d)$ such that the free surface is always above the bottom (i.e. the water depth is bounded from below by some fixed value), the mapping $\mathcal{G} : \dot{H}^{s+1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^d)$ is analytic in ζ for all $0 \leq s \leq t_0 + 1/2$.

The first terms of this analytic expansion of the Dirichlet-Neumann operator are given by

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \epsilon\mathcal{G}_1[\zeta] + \epsilon^2\mathcal{G}_2[\zeta, \zeta] + \epsilon^3\mathcal{G}_3[\zeta, \zeta, \zeta] + \dots =: \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(2)} + \mathcal{G}^{(3)} + \dots \quad (2.4)$$

where \mathcal{G}_0 , $\mathcal{G}_1[\zeta]$ and $\mathcal{G}_2[\zeta, \zeta]$ are defined by

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0(D) = |D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|) \quad (2.5)$$

$$\mathcal{G}_1[h] = -\mathcal{G}_0(h(\mathcal{G}_0\cdot)) - \nabla \cdot (h\nabla\cdot) \quad (2.6)$$

$$\mathcal{G}_2[h_1, h_2] = \mathcal{G}_0(h_1\mathcal{G}_0(h_2\mathcal{G}_0\cdot)) + \frac{1}{2}\Delta(h_1h_2\mathcal{G}_0\cdot) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_0(h_1h_2\Delta\cdot) \quad (2.7)$$

and $\mathcal{G}_3[\zeta, \zeta, \zeta]$ as well as higher order terms of the expansion can also be explicitly calculated. The definition of $\mathcal{G}_0(D)$ is to be understood in the sense of Fourier multiplier operators, i.e. in Fourier space the action of the operator is given by

$$\widehat{\mathcal{G}_0(D)f}(\xi) := |\xi| \tanh(\sqrt{\mu}|\xi|)\hat{f}(\xi).$$

We note furthermore that we take the expansion of $\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}$ rather than that of \mathcal{G} to get residual estimates that are uniform in ϵ .

We have the following estimate on the residual of the above expansion (we recall the notation $s \vee t_0 := \max\{s, t_0\}$).

Proposition 2.1.1 (D. Lannes). *Let $t_0 > d/2$ and $s \geq 0$. Let also $\zeta \in H^{s+1} \cap H^{t_0+1}(\mathbb{R}^d)$ such that*

$$\exists h_{min} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, 1 + \epsilon\zeta(\mathbf{x}) \geq h_{min}$$

and $\psi \in \dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^d)$.

For $n \geq 0$ we have

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\psi - \sum_{j=0}^n \mathcal{G}^{(j)} \right|_{H^s} \leq \epsilon^{n+1} M_0 |\zeta|_{H^{(s \vee t_0)+1}}^{n+1} |\nabla\psi|_{H^s},$$

where M_0 is a constant of the form $M_0 = C(\frac{1}{h_{min}}, \epsilon_{max}, |\epsilon\zeta|_{H^{t_0+1}})$.

This proposition is proved (in more general terms) in [Lan13], proposition 3.43.

Remark 2.1.1. In the modulational analysis that we will carry out later on, ζ and ψ will be multiscale functions of the form $\zeta(\mathbf{x}) = a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ and $\psi(\mathbf{x}) = b(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}$. The L^2 -norm of such functions is of size $O(\epsilon^{-d/2})$. Applying proposition 2.1.1 in this case, we get the residual estimate

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\psi - \sum_{j=0}^n \mathcal{G}^{(j)} \right|_{H^s} \leq M_0 \epsilon^{n+1-(n+2)d/2} |a|_{H^{(s \vee t_0)+1}}^{n+1} |b|_{H^{s+1}}. \quad (2.8)$$

We note that for $d = 2$ the residual of the expansion is therefore never small with respect to ϵ , and for $d = 1$ we have to write the expansion up to order $n = 2k$ to get an error of order $O(\epsilon^k)$. The error estimate in Sobolev norms is therefore probably not the best choice in our setting.

If one is not concerned with regularity of the wave profile, one could use the residual estimates of

Craig, Schanz and Sulem given in theorem 2.1.1. These involve only the L^∞ -norms of ζ and its derivatives, and as $|\zeta|_{L^\infty} = |a|_{L^\infty}$ for $\zeta = a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ the problem that multiscale functions have a large L^2 -norm is avoided. Quickly reviewing the proof of theorem 2.1.1 suggests that the residual estimate for the nondimensionalized DN-operator \mathcal{G} would be under the form

$$|\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\psi - \sum_{j=0}^n \mathcal{G}^{(j)}|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)\epsilon^{n+1}|\zeta|_{C^1(\mathbb{R}^2)}^n(|\zeta|_{C^1(\mathbb{R}^2)}|\psi|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^2)} + |\zeta|_{C^{s+1}(\mathbb{R}^2)}|\psi|_{H^1(\mathbb{R}^2)}). \quad (2.9)$$

Nevertheless, as our calculations in the following sections are mostly of formal nature and can be carried out with a certain independence of the precise norms that control the residual error, we can assume for the moment that we dispose of an formal estimate under the form

$$|\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\psi - \sum_{j=0}^n \mathcal{G}^{(j)}|_{H^s} \leq \epsilon^{r(n)}C(\|a\|_{X_1}, \|b\|_{X_2}) \quad (2.10)$$

for multiscale functions $\zeta(\mathbf{x}) = a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ and $\psi(\mathbf{x}) = b(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}}$, and for some continuous (probably polynomial) function $C(\cdot, \cdot)$. The norms of a and b can be specified later on. We furthermore denote by X_1 and X_2 the function spaces associated to the norms $\|\cdot\|_{X_1}$ and $\|\cdot\|_{X_2}$. $r(n)$ designates the order of error we obtain with respect to the chosen norms if we write the (formal) expansion of the DN-operator up to order n . For instance, if we use the estimate (2.8) we have $X_1 = H^{(s\vee t_0)+1}$, $X_2 = H^{s+1}$ and $r(n) = n + 1 - (n + 2)d/2$. In the case of estimate (2.9) where X_1 is a space of several times continuously differentiable functions and X_2 a Sobolev space, we have $r(n) = n$.

2.1.4 The linearized system

Taking (formally) the limit $\epsilon \rightarrow 0$ in the water wave equations with surface tension (2.1) we get the linearized equations

$$\begin{cases} \zeta_t - \mathcal{G}_0(D)\psi = 0, \\ \psi_t + \zeta = \beta\Delta\zeta, \end{cases} \quad (2.11)$$

where we recall that $\mathcal{G}_0(D) = |D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)$.

Defining the phase $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$, we recall from the introduction that the system (2.11) admits real plane wave solutions under the form

$$U_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} i\lambda A \\ A \end{pmatrix} e^{i\theta} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

where $A \in \mathbb{C}$ and $B \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants and $c.c.$ denotes the complex conjugate of the preceding term. The frequency ω is related to the wave vector $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ by the dispersion relation

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = [|\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(1 + \beta|\mathbf{k}|^2)]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Furthermore the parameter $\lambda = \lambda(\mathbf{k})$ is given by $\lambda = \frac{\omega}{g}$ with

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{k}) = 1 + \beta|\mathbf{k}|^2. \quad (2.14)$$

To simplify the notations in the following, we also define $g_0(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)$. With this notation we get $\omega^2(\mathbf{k}) = g_0(\mathbf{k})\vartheta(\mathbf{k})$.

2.2 Construction of an asymptotic solution

2.2.1 Choosing the ansatz

For small ϵ we can consider the full water wave equations (2.1) as a perturbation of the linear system (2.11). It is therefore natural to search asymptotic solutions to (2.1) which, for small ϵ , are in some sense close to plane wave solutions of the linearized system. We choose to search asymptotic solutions under the form

$$\tilde{\zeta} = \zeta^{(0)}(t, \mathbf{x}) + \epsilon \zeta^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \epsilon^2 \zeta^{(2)}(t, \mathbf{x}), \quad (2.15)$$

$$\tilde{\psi} = \psi^{(0)}(t, \mathbf{x}) + \epsilon \psi^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \epsilon^2 \psi^{(2)}(t, \mathbf{x}), \quad (2.16)$$

where $U_0 = (\zeta^{(0)}, \psi^{(0)})$ is a plane wave solution of (2.11). It is well known that the amplitude of a plane wave is slowly modulated by nonlinear effects of the full equation (2.1), so we take

$$\begin{pmatrix} \zeta^{(0)} \\ \psi^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \\ A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{i\theta} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

To see under which form we should choose $(\zeta^{(1)}, \psi^{(1)})$ and $(\zeta^{(2)}, \psi^{(2)})$ we plug $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ with U_0 defined by (2.17) in the water wave equations and calculate (as far as possible) the first terms of the expansion. We then notice that the nonlinearities in (2.1) do not preserve the structure of U_0 but create higher order harmonics $e^{in\theta}$ oscillating with a phase $n\theta$ for $|n| \neq 1$. For instance, the terms of order $O(\epsilon)$ lead to harmonics with $|n| \leq 2$.

Therefore we take

$$\zeta^{(1)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^2 P_n(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + c.c. + P_0(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}), \quad (2.18)$$

$$\psi^{(1)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^2 Q_n(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + c.c. + Q_0(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}). \quad (2.19)$$

Passing at the next order correction we see that we should furthermore search

$$\zeta^{(2)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^3 \zeta_n^{(2)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + c.c. + \zeta_0^{(2)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}), \quad (2.20)$$

$$\psi^{(2)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^3 \psi_n^{(2)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + c.c. + \psi_0^{(2)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}). \quad (2.21)$$

In the following we will also sometimes write $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ under the compact forms

$$\tilde{\zeta}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^2 \sum_{n=-j-1}^{j+1} \zeta_n^{(j)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta}, \quad \tilde{\psi}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^2 \sum_{n=-j-1}^{j+1} \psi_n^{(j)}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta}$$

with the obvious identifications between $\zeta_n^{(j)}$, $\psi_n^{(j)}$ and A , B , P_n and Q_n .

2.2.2 Asymptotic expansion of the water wave equations

We introduce some notation. We denote $D = -i\nabla$. We define the linearized system operator by

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_t, D) = \begin{pmatrix} \partial_t & -\mathcal{G}_0(D) \\ 1 + \beta|D|^2 & \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t & -g_0(D) \\ \mathcal{T}(D) & \partial_t \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

We rewrite the water waves equations (2.1) by separating its linear and nonlinear part as

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix} + \mathcal{N}(\zeta, \psi) = 0, \quad (2.23)$$

with

$$\mathcal{N}(\zeta, \psi) = \begin{pmatrix} -(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)\psi \\ \frac{\epsilon}{2}|\nabla\psi|^2 - \epsilon \frac{(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\psi + \epsilon\nabla\zeta \cdot \nabla\psi)^2}{2(1+\epsilon^2|\nabla\zeta|^2)} + \beta(\frac{\kappa(\epsilon\zeta)}{\epsilon} - \kappa_0(\zeta)) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

where κ_0 is defined by $\kappa_0 := -\Delta$.

Our goal is to determine $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ such that formally

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \mathcal{N}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = O(\epsilon^3).$$

In view of the form of $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$, we therefore need to calculate the action of the differential and pseudo-differential operators in (2.22) - (2.24) on multiscale functions of wave packet form $a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})e^{in\theta}$. In the following we denote the slow variables by $(T, \mathbf{x}') := (\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})$, with $\mathbf{x}' = (X, Y)$ for $d = 2$ and $\mathbf{x}' = X$ for $d = 1$. We then easily obtain that the differential operators ∂_t and ∇ act on multiscale functions by

$$\partial_t \left(a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})e^{in\theta} \right) = -in\omega a|_{(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})} e^{in\theta} + \epsilon \partial_T a|_{(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})} e^{in\theta} \quad (2.25)$$

and (writing ∇' for the gradient with respect to $\mathbf{x}' = \epsilon \mathbf{x}$)

$$\nabla \left(a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})e^{in\theta} \right) = in\mathbf{k} a|_{(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})} e^{in\theta} + \epsilon \nabla' a|_{(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x})} e^{in\theta}. \quad (2.26)$$

To calculate the expansions of the operators $\mathcal{T} = 1 + \beta|D|^2$ and \mathcal{G}_0 acting on multiscale functions of wave packet form we will need the following lemma.

Lemma 2.2.1. *Let $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, $s \geq 0$, and $a(\mathbf{x})$ smooth enough. Then,*

1. *Denoting $g_0(\xi) := \omega^2(\xi) = |\xi| \tanh(\sqrt{\mu}|\xi|)$ and $\vartheta(\xi) := 1 + \beta|\xi|^2$, one has (writing $D' = -i\nabla'$)*

$$\mathcal{G}_0(a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = g_0(\mathbf{k} + \epsilon D') a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

and

$$\mathcal{T}(a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = \vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D') a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

2. *The expressions of 1. can be expanded into powers of ϵ in the following sense*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) &= g_0(\mathbf{k})a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} D' \cdot \mathcal{H}_{g_0}(\mathbf{k}) D' a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon^3 R_a^{(3)}(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

where $\mathcal{H}_{g_0}(\mathbf{k})$ stands for the Hessian matrix of g_0 evaluated at \mathbf{k} , and the third order residual term can be controlled by $|R_a^{(3)}|_{H^s} \lesssim |a|_{H^{s+3}}$.

Furthermore

$$\mathcal{T}(a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = \vartheta(\mathbf{k})a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + 2\epsilon\beta \mathbf{k} \cdot D' a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon^2 \beta |D'|^2 a|_{\epsilon \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Remark 2.2.1. We note that $\sup_{\xi} |\mathcal{H}_{g_0}(\xi)| \leq C$ and $\sup_{\xi} |\nabla g_0(\xi)| \leq C$. So we can also write the expansion up to first order $\mathcal{G}_0(a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = g_0(\mathbf{k})a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \epsilon R_a^{(1)}(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ with $|R_a^{(1)}|_{H^s} \lesssim |a|_{H^{s+1}}$ or up to second order with residual estimate $|R_a^{(2)}|_{H^s} \lesssim |a|_{H^{s+2}}$.

Proof of lemma 2.2.1. We write $\alpha(\mathbf{x}) = a(\epsilon \mathbf{x})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Then we have $\hat{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\epsilon^d} \hat{a}(\frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon})$. The operator \mathcal{G}_0 is defined by multiplication with $g_0(\xi)$ in Fourier space. Therefore

$$\mathcal{G}_0(\alpha(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} g_0(\xi) \frac{1}{\epsilon^d} \hat{a}\left(\frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon}\right) d\xi.$$

We change variables by $\eta = \frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon}$. Then

$$\mathcal{G}_0(\alpha(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k} + \epsilon \eta)} g_0(\mathbf{k} + \epsilon \eta) \hat{a}(\eta) d\eta = g_0(\mathbf{k} + \epsilon D') a(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.27)$$

For \mathcal{T} we proceed in the same way. This proves 1. The second point follows by a Taylor expansion of $g_0(\mathbf{k} + \epsilon \eta)$ in (2.27). \square

Using lemma 2.2.1 we can expand the linear part of the equation. To this end we define

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} -in\omega & -g_0(n\mathbf{k}) \\ 1 + \beta|n\mathbf{k}|^2 & -in\omega \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}'_n(D') = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla g_0(n\mathbf{k}) \cdot D' \\ 2\beta n\mathbf{k} \cdot D' & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\mathcal{L}_1^\epsilon = \begin{pmatrix} -i\omega & -g_0(\mathbf{k} + \epsilon D') \\ \vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D') & -i\omega \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_0^\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon \partial_T & -g_0(\epsilon D') \\ \vartheta(\epsilon D') & \epsilon \partial_T \end{pmatrix}.$$

We then have the following lemma which is a direct consequence of the expansions of lemma 2.2.1.

Lemma 2.2.2. *Let \mathcal{L} be the operator associated to the linearized system defined by (2.22). Then we have the expansion*

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{i\theta} \\ b(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{i\theta} \end{pmatrix} = \mathcal{L}_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\theta} + \epsilon \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} e^{i\theta} + \epsilon \mathcal{L}'_n(D') \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\theta} + \epsilon^2 R(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{i\theta}$$

with residual estimate $|R(\epsilon t, \cdot)|_{H^s} \lesssim |a(\epsilon t, \cdot)|_{H^{s+2}} + |b(\epsilon t, \cdot)|_{H^{s+2}}$ for $s \geq 0$.

Furthermore, using point 1 of lemma 2.2.1, we get

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{i\theta} \\ b(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{i\theta} \end{pmatrix} = \mathcal{L}_1^\epsilon \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\theta} + \epsilon \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} e^{i\theta}$$

and

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} a(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \\ b(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathcal{L}_0^\epsilon \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

In the following we will calculate the expansion of the full water wave equations with surface tension (2.1). For this, we define the constants

$$\sigma = \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|), \quad \sigma_2 = \tanh(2\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|), \quad \vartheta_n = 1 + \beta|n\mathbf{k}|^2. \quad (2.28)$$

To get the expansion of $\kappa(\zeta)$ we note that

$$\kappa(\zeta) = -\frac{\zeta_{xx}}{(1 + |\zeta_x|^2)^{3/2}} \quad (2.29)$$

for $\mathbf{x} = x$. In two dimensions (i.e. $\mathbf{x} = (x, y)$) we have

$$\kappa(\zeta) = -\frac{\Delta\zeta}{\sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2}} + \frac{\zeta_x^2\zeta_{xx} + 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + \zeta_y^2\zeta_{yy}}{(1 + |\nabla\zeta|^2)^{3/2}}. \quad (2.30)$$

The following proposition is a first step towards the construction of the asymptotic solution $\tilde{U} = (\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$, with $\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}$ as defined in (2.2.1). We will derive an asymptotic expression $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{U} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{U})$ such that

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{U} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{U}) = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{U} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{U}) + O(\epsilon^3).$$

The coefficients $\zeta_n^{(j)}, \psi_n^{(j)}$ of \tilde{U} will then be determined in the next section by "solving" the asymptotic system $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{U} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{U}) = O(\epsilon^3)$.

Notation. To distinguish Sobolev spaces with respect to small and fast variables, we write $|f|_{H_{\mathbf{x}}^s}$ if the Sobolev norm of f is taken with respect to \mathbf{x} , and $|f|_{H_{\mathbf{x}'}^s}$ if it is taken with respect to the fast variable.

Proposition 2.2.1. *Let $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ be as given in section 2.2.1, and*

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix} + \mathcal{N}(\zeta, \psi) = 0$$

the water wave equations with surface tension as written in (2.22) - (2.24). Then, plugging $\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}$ in these equations, one can expand the linear and nonlinear part in the following way:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \mathcal{N}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = \tilde{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) + \epsilon^3 \sum_{n=-N}^N \mathcal{R}_{3n}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + \mathcal{R}_4(t, \mathbf{x})$$

for some $N \geq 4$ where

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = & \mathcal{L}_1^\epsilon \begin{pmatrix} i\lambda A \\ A \end{pmatrix} e^{i\theta} + c.c. + \mathcal{L}_0^\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} + \epsilon \left[\begin{pmatrix} i\lambda A_T \\ A_T \end{pmatrix} e^{i\theta} + \sum_{n=1}^2 \mathcal{L}_n \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} e^{in\theta} + c.c. + \mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \right] \\ & + \epsilon^2 \left[\sum_{n=1}^2 \left[\begin{pmatrix} \partial_T P_n \\ \partial_T Q_n \end{pmatrix} + \mathcal{L}'_n(D') \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \right] e^{in\theta} + c.c. + \begin{pmatrix} \partial_T P_0 \\ \partial_T Q_0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^3 \mathcal{L}_n \begin{pmatrix} \zeta_n^{(2)} \\ \psi_n^{(2)} \end{pmatrix} e^{in\theta} + c.c. + \mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} \zeta_0^{(2)} \\ \psi_0^{(2)} \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

and

$$\tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = \begin{pmatrix} \epsilon(\sum_{n=1}^2 A_n e^{in\theta} + c.c. + A_0) + \epsilon^2(\sum_{n=1}^3 R_n e^{in\theta} + c.c. + R_0) \\ \epsilon(\sum_{n=1}^2 B_n e^{in\theta} + c.c. + B_0) + \epsilon^2(\sum_{n=1}^3 S_n e^{in\theta} + c.c. + S_0) \end{pmatrix}$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -2i\lambda|\mathbf{k}|^2[1 - \sigma\sigma_2]A^2, \\ B_0 = |\mathbf{k}|^2(1 - \sigma^2)|A|^2, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{2}|\mathbf{k}|^2(1 + \sigma^2)A^2, \\ R_0 = 2\lambda\mathbf{k} \cdot \nabla' |A|^2, \\ R_1 = -\lambda A \mathbf{k} \cdot \nabla' B + \lambda^2 |\mathbf{k}|^3 \sigma [1 - 2\sigma\sigma_2] |A|^2 A, \\ \quad \quad \quad + 2i\lambda |\mathbf{k}|^2 [1 - \sigma\sigma_2] \bar{A} Q_2 + |\mathbf{k}|^2 [1 + \sigma^2] \bar{A} P_2 - |\mathbf{k}|^2 [1 - \sigma^2] A P_0, \\ S_0 = |\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma^2) (Q_1 \bar{A} + \bar{Q}_1 A) - i\mathbf{k} \cdot \nabla' A \bar{A} + i\mathbf{k} \cdot \nabla' \bar{A} A \\ \quad \quad \quad - i|\mathbf{k}| \sigma \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot \nabla' \bar{A} A + i|\mathbf{k}| \sigma \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot \nabla' A \bar{A}, \\ S_1 = 2|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma\sigma_2) \bar{A} Q_2 + i\lambda |\mathbf{k}|^3 (2\sigma^2 \sigma_2 - \sigma - \frac{3\lambda^2 \beta |\mathbf{k}|}{2}) |A|^2 A + i\mathbf{k} \cdot \nabla' B A. \end{array} \right.$$

R_2, S_2, R_3 and S_3 can also be calculated explicitly.

Moreover, for $s \in \mathbb{N}, s > d/2$ we have the residual estimate

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\mathcal{R}_{3n}(\epsilon t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} + \epsilon^{-r(n_0)} |\mathcal{R}_4(t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \\ |A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}} (|A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}} + |B(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}}) + \\ C(\sum |\zeta_n^{(j)}(T)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0}}, \sum \|\zeta_n^{(j)}(T)\|_{X_1}, \sum |\psi_n^{(j)}(T)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0+1}}, \sum \|\psi_n^{(j)}(T)\|_{X_2}), \end{aligned}$$

where $3 \leq n_0 \in \mathbb{N}$ and $r(n_0)$ is defined as in (2.10).

Remark 2.2.2. To obtain the full dispersion Benney-Roskes system we retain the action of \mathcal{L} on the leading term $U_0 = \begin{pmatrix} i\lambda A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \\ A(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{i\theta} + c.c. + \begin{pmatrix} 0 \\ B(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) \end{pmatrix}$ of the asymptotic solution. In effect,

$$\mathcal{L}U_0 = \mathcal{L}_1^\epsilon \begin{pmatrix} i\lambda A \\ A \end{pmatrix} e^{i\theta} + c.c. + \mathcal{L}_0^\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}.$$

Remark 2.2.3. For the sake of completeness, we give here the expressions for S_2, R_2, S_3 and R_3 .

$$\begin{aligned} R_2 = -2\lambda |\mathbf{k}| (\sigma \nabla g_0(2\mathbf{k}) \cdot \nabla' A + \sigma_2 \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot \nabla' A) A + 4\lambda \mathbf{k} \cdot \nabla' c.c. \\ + 2i\lambda |\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma\sigma_2) A Q_1 + 2|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma\sigma_2) A P_1 \end{aligned}$$

$$R_3 = -\lambda^2 |\mathbf{k}|^3 (6\sigma\sigma_2\sigma_2 + \frac{9}{2}\sigma + \frac{3}{2}\sigma_3) A^3 + 6i\lambda |\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma_2\sigma_3) A Q_2 + 3|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma\sigma_3) A P_2$$

$$S_2 = i|\mathbf{k}| \sigma \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot \nabla' c.c. + i\mathbf{k} \cdot \nabla' A \bar{A} - |\mathbf{k}|^2 (1 + \sigma^2) A Q_1$$

$$S_3 = -2|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma\sigma_2) A Q_2 + i\lambda |\mathbf{k}|^3 (\sigma(2\sigma_2 - 1) - \frac{3\beta}{2} \lambda^2 |\mathbf{k}|) A^3$$

Proof of proposition 2.2.1. The **expansion of $\mathcal{L}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$** follows by straightforward calculations using the definition of $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ and lemma 2.2.2.

Expansion of $\mathcal{N}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$: We plug in $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ as defined in (2.15) - (2.21) and calculate the expansions with respect to ϵ , where we explicitly calculate the coefficients with formal order less or equal than two.

Taking a look at $\mathcal{N}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$, the terms which we have to expand are

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \mathcal{G}_0\right)\tilde{\psi}, \quad \frac{\epsilon}{2}|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi}|^2, \quad \epsilon \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\tilde{\psi} + \epsilon \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi}\right)^2}{2(1 + \epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)} \quad \text{and} \quad \beta\left(\frac{\kappa(\epsilon\tilde{\zeta})}{\epsilon} - \kappa_0(\tilde{\zeta})\right).$$

We write the expansion of the gradient $\nabla_{\mathbf{x}}$ acting on multiple scale functions $f(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ as $\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla + \epsilon\nabla'$ where ∇' designates the gradient with respect to \mathbf{x}' .

We now give a lemma that will be needed to estimate residual terms in the expansion the nonlinear part. In particular, it gives estimates of \mathcal{G}_1 and \mathcal{G}_2 acting on multiscale functions.

Lemma 2.2.3. *Let $t_0 > d/2$ and $s \geq 0$. Let $a(\mathbf{x}'), b(\mathbf{x}'), c(\mathbf{x}')$ smooth enough and $\alpha(\mathbf{x}) = a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, $\beta(\mathbf{x}) = b(\epsilon\mathbf{x})e^{in\cdot\mathbf{x}}$, $\gamma(\mathbf{x}) = c(\epsilon\mathbf{x})e^{im\cdot\mathbf{x}}$. Then*

1.

$$|\alpha|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}} |a|_{H_{\mathbf{x}'}^s}.$$

2.

$$|g_0(\mathbf{k} + \epsilon D')a|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim |a|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+1}}.$$

3.

$$|\mathcal{G}_0(\alpha\mathcal{G}_0\beta)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}} |a|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+1}} |b|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}}.$$

4.

$$|\mathcal{G}_1[\alpha]\beta|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}} |a|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+1}} |b|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}}.$$

5.

$$|\mathcal{G}_2[\alpha, \beta]\gamma|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}} |a|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+2}} |b|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+2}} |c|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+3}}.$$

Furthermore, higher order terms of the expansion of \mathcal{G} can be estimated by

$$|\mathcal{G}_j[\alpha_1, \dots, \alpha_j]\beta|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}} \prod_{n=1}^j |a_n|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+j}} |b|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+j+1}}.$$

Proof. To prove the first point we note that by properties of the Fourier transform we have $\hat{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\epsilon^d} \hat{a}\left(\frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon}\right)$. Therefore

$$\begin{aligned} |\alpha|_{H_{\mathbf{x}}^s}^2 &= \int (1 + |\xi|^2)^s \frac{1}{\epsilon^{2d}} |\hat{a}\left(\frac{\xi - \mathbf{k}}{\epsilon}\right)|^2 d\xi = \frac{1}{\epsilon^d} \int (1 + |\mathbf{k} + \epsilon\eta|^2)^s |\hat{a}(\eta)|^2 d\eta \\ &\lesssim \frac{1}{\epsilon^d} \int (1 + |\eta|^2)^s |\hat{a}(\eta)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

This proves 1. The second point is proved by the same argument (passing to Fourier transform and using $|\mathbf{k} + \epsilon\eta| \lesssim 1 + |\eta|$).

To prove the third point we use point 1 of lemma 2.2.1 to calculate

$$\mathcal{G}_0(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\mathcal{G}_0(b(\epsilon\mathbf{x})e^{in\cdot\mathbf{x}})) = \mathcal{G}_0(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}b_1(\epsilon\mathbf{x})e^{in\cdot\mathbf{x}}) = p(\epsilon\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}+n)\cdot\mathbf{x}}$$

where $b_1(\mathbf{x}') = g_0(n + \epsilon D')b(\mathbf{x}')$ and $p(\mathbf{x}') = g_0(\mathbf{k} + n + \epsilon D')[a(\mathbf{x}')b_1(\mathbf{x}')]$. The key point is that the resulting function is again of multiscale-wavepacket form. Then we use 1. and 2. to get

$$|\mathcal{G}_0(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\mathcal{G}_0(b(\epsilon\mathbf{x})e^{il\cdot\mathbf{x}}))|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}}|p|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}}|ab_1|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+1}} \lesssim \epsilon^{-\frac{d}{2}}|a|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+1}}|b|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}}.$$

The estimates of point 4 and 5 are obtained in a similar way. The estimates for the higher order terms can be obtained by recursion. \square

Expansion of $\frac{\epsilon}{2}|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi}|^2$: Using the expansion of $\nabla_{\mathbf{x}}$ we get

$$|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi}|^2 = |\nabla\psi^{(0)}|^2 + \epsilon(2\nabla\psi^{(0)} \cdot \nabla\psi^{(1)} + 2\nabla\psi^{(0)} \cdot \nabla'\psi^{(0)}) + \epsilon^2\mathcal{R}^{grad}(t, \mathbf{x})$$

where the residual is given by a sum of multiscale functions

$\mathcal{R}^{grad}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=-6}^6 \mathcal{R}_n^{grad}(\epsilon t, \epsilon\mathbf{x})e^{in\theta}$. By the first point of lemma 2.2.3 we easily get the estimate

$$\sum_{n=-6}^6 |\mathcal{R}_n^{grad}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim \sum |\psi_n^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+1}} |\psi_m^{(l)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s\vee t_0)+1}}, \quad s \geq 0.$$

Expansion of \mathcal{G} : We define $\tilde{\mathcal{G}} := \sum_{j=0}^{n_0} \mathcal{G}^{(j)}$ for some $n_0 \geq 3$.

We furthermore write the asymptotic expansion of \mathcal{G}_0 given by lemma 2.2.1 in the symbolic form

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{A}_0 + \epsilon\mathcal{A}_1 + \epsilon^2\mathcal{A}_2 + O(\epsilon^3),$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) &= g_0(\mathbf{k})a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathcal{A}_1(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) &= \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D'a|_{\epsilon\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathcal{A}_2(a(\epsilon\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}D' \cdot \mathcal{H}_{g_0}(\mathbf{k}) D'a|_{\epsilon\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Plugging in $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ and expanding \mathcal{G}_0 according to lemma 2.2.1 we get

$$\mathcal{G}_0\tilde{\psi} = \mathcal{A}_0\psi^{(0)} + \epsilon(\mathcal{A}_1\psi^{(0)} + \mathcal{A}_0\psi^{(1)}) + \epsilon^2\mathcal{R}_0(t, \mathbf{x}) =: \mathcal{G}_{00} + \epsilon\mathcal{G}_{01} + \epsilon^2\mathcal{R}_0(t, \mathbf{x}),$$

where by lemma 2.2.1 the residual can be calculated explicitly as a sum of multiscale functions $\mathcal{R}_0(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=-3}^3 \mathcal{R}_{0n}(T, \mathbf{x}')e^{in\theta}$. Furthermore by lemma 2.2.1 the residual terms can be estimated by

$$\sum_{n=-3}^3 |\mathcal{R}_{0n}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim \sum |\psi_n^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}}, \quad s \geq 0.$$

Next, plugging $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ in $\mathcal{G}_1[\zeta]$ we get

$$\epsilon\mathcal{G}_1[\tilde{\zeta}]\tilde{\psi} = -\sum_{j=0}^4 \epsilon^{j+1} \sum_{i+k=j} \mathcal{G}_0(\zeta^{(i)}(\mathcal{G}_0\psi^{(k)})) + \nabla \cdot (\zeta^{(i)}\nabla\psi^{(k)}) \quad (2.31)$$

We then plug the multiscale expansions of the gradient and of \mathcal{G}_0 in the expansions obtained in the first step. So we get for $j = 0$ in (2.31)

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{G}_0(\zeta^{(0)}(\mathcal{G}_0\psi^{(0)})) - \nabla \cdot (\zeta^{(0)}\nabla\psi^{(0)}) \\
& \quad = -\mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}(\mathcal{A}_0\psi^{(0)})) - \nabla \cdot (\zeta^{(0)}\nabla\psi^{(0)}) \\
& \quad - \epsilon\mathcal{A}_1(\zeta^{(0)}(\mathcal{A}_0\psi^{(0)})) - \epsilon\mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}(\mathcal{A}_1\psi^{(0)})) \\
& \quad - \epsilon\nabla' \cdot (\zeta^{(0)}\nabla\psi^{(0)}) - \epsilon\nabla \cdot (\zeta^{(0)}\nabla'\psi^{(0)}) + O(\epsilon^2) =: \mathcal{G}_{11} + \epsilon\mathcal{G}_{12}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (2.32)
\end{aligned}$$

and for $j = 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i+k=1} \mathcal{G}_0(\zeta^{(i)}(\mathcal{G}_0\psi^{(k)})) + \nabla \cdot (\zeta^{(i)}\nabla\psi^{(k)}) = \\
& \quad - \mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}(\mathcal{A}_0\psi^{(1)})) - \mathcal{A}_0(\zeta^{(1)}(\mathcal{A}_0\psi^{(0)})) - \nabla \cdot (\zeta^{(0)}\nabla\psi^{(1)}) \\
& \quad - \nabla \cdot (\zeta^{(1)}\nabla\psi^{(0)}) + O(\epsilon) =: \mathcal{G}_{12}^{(2)} + O(\epsilon). \quad (2.33)
\end{aligned}$$

So

$$\epsilon\mathcal{G}_1[\tilde{\zeta}]\tilde{\psi} = \epsilon\mathcal{G}_{11} + \epsilon^2\mathcal{G}_{12} + \epsilon^3\mathcal{R}_1(t, \mathbf{x})$$

with $\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_{12}^{(1)} + \mathcal{G}_{12}^{(2)}$. Considering lemma 2.2.1, we note that the residual term \mathcal{R}_1 can be written explicitly as a sum of multiscale functions $\mathcal{R}_{1n}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=-6}^6 \mathcal{R}_{1n}(T, \mathbf{x}')e^{in\theta}$ where the functions \mathcal{R}_{1n} depend only on the coefficients $\zeta_n^{(j)}$ and $\psi_n^{(j)}$ of $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$. Counting the derivatives that fall on the coefficients (where we use that \mathcal{G}_0 behaves roughly like an order 1 derivative) we get the estimate

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-6}^6 |\mathcal{R}_{1n}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim |A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}} (|A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}} + |B(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}}) \\
& \quad + \sum_{j+k=1}^4 \sum_{n,l} |\zeta_n^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s \vee t_0)+1}} |\psi_l^{(k)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}}, \quad s \geq 0.
\end{aligned}$$

Finally by the same arguments

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2\mathcal{G}_2[\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}]\tilde{\psi} = \\
& \quad = \sum_{j=0}^6 \epsilon^{j+2} \sum_{i+k+l=j} \mathcal{G}_0(\zeta^{(i)}\mathcal{G}_0(\zeta^{(k)}\mathcal{G}_0\psi^{(l)})) + \frac{1}{2}\Delta(\zeta^{(i)}\zeta^{(k)}\mathcal{G}_0\psi^{(l)}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_0(\zeta^{(i)}\zeta^{(k)}\Delta\psi^{(l)}) \\
& \quad = \epsilon^2\mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}\mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}\mathcal{A}_0\psi^{(0)})) + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta((\zeta^{(0)})^2\mathcal{A}_0\psi^{(0)}) + \frac{\epsilon^2}{2}\mathcal{A}_0((\zeta^{(0)})^2\Delta\psi^{(0)}) + O(\epsilon^3) \\
& \quad =: \epsilon^2\mathcal{G}_{22} + \epsilon^3\mathcal{R}_2(t, \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

with $\mathcal{R}_2(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=-9}^9 \mathcal{R}_{2n}(T, \mathbf{x}')e^{in\theta}$ and estimate

$$\sum_{n=-9}^9 |\mathcal{R}_{2n}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} \lesssim C(\sum |\zeta_n^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{(s \vee t_0)+2}}, \sum |\psi_n^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+3}}), \quad s \geq 0.$$

Using the above expansions we get

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \mathcal{G}_0\right)\tilde{\psi} = \epsilon\mathcal{G}_{11} + \epsilon^2(\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{22}) + \epsilon^3(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \sum_{j=3}^{n_0} \mathcal{G}^{(j)}) + \mathcal{D}\tilde{\psi}.$$

with $\mathcal{D} = (\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \tilde{\mathcal{G}})$. We note that $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \sum_{j=3}^{n_0} \mathcal{G}^{(j)}\tilde{\psi}$ is of the form $\sum_n a_n(T, \mathbf{x}')e^{in\theta}$.

To expand the remaining terms we will have to expand functions of the form $(1 + \epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)^{-\alpha}$. The estimates for the residuals of the expansion are given by the following lemma:

Lemma 2.2.4. *Let $h(z) = (1 + z)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ and*

$$r_1(z) = z \int_0^1 h'(zt) dt, \quad r_2(z) = z^2 \int_0^1 (1-t)h''(zt) dt$$

the first (respectively second) order residual term of the Taylor expansion of h around zero. Then for $s > \frac{d}{2}$, $s \in \mathbb{N}$

$$|r_1(\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{2-d/2} C_s (\sum |\zeta_n^{(j)}|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+1}})$$

and

$$|r_2(\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{4-d/2} C_s (\sum |\zeta_n^{(j)}|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+1}}).$$

Proof. We first note that all derivatives of $h(z)$ stay uniformly bounded for $z \geq 0$. Considering the definition of $\tilde{\zeta}$ we see that $r_1(\epsilon^2|\nabla\tilde{\zeta}|^2)$ and $r_2(\epsilon^2|\nabla\tilde{\zeta}|^2)$ are a sum of terms of the form $a(\epsilon\mathbf{x})e^{in\theta}b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})$, where a is a product of functions depending on $\zeta_n^{(j)}$ and $b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})$ is bounded uniformly with respect to \mathbf{x} (i. e. there exists a constant $C > 0$ such that $\sup_{\mathbf{x}} |b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})| \leq C$). This is a consequence of the uniform boundedness of the derivatives of h .

The L_X^2 norm of such a term can be estimated by

$$|a(\epsilon\mathbf{x})e^{in\theta}b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})|_{L_X^2} \leq |a(\epsilon\mathbf{x})|_{L_X^2} |b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})|_{L_X^\infty} \leq C\epsilon^{-\frac{d}{2}} |a|_{L_{\mathbf{x}'}^2}.$$

Furthermore taking derivatives of $r_1(\epsilon^2|\nabla\tilde{\zeta}|^2)$ and $r_2(\epsilon^2|\nabla\tilde{\zeta}|^2)$ with respect to \mathbf{x} does not change their structure (i.e. they remain a sum of terms of the form $a(\epsilon\mathbf{x})e^{in\theta}b(\mathbf{x}, \epsilon\mathbf{x})$). b also stays bounded as all the derivatives of h are bounded. The function $a(\epsilon\mathbf{x})$ is a product of derivatives with respect to \mathbf{x}' of the coefficients $\zeta_n^{(j)}$ of $\tilde{\zeta}$. Counting the number of derivatives falling on the coefficients we get the above estimates. \square

Expansion of $\epsilon \frac{(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\tilde{\psi} + \epsilon\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi})^2}{2(1+\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)}$:

We take $h(z) = (1 + z)^{-1}$. By Taylor expansion

$$h(z) = 1 - z + r_2(z)$$

with r_2 as defined in lemma 2.2.4.

So

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G}\tilde{\psi} + \epsilon\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi})^2}{2(1+\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)} = \\ & \quad \frac{\epsilon}{2} \left(\tilde{\mathcal{G}}\tilde{\psi} + \epsilon\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi} + (\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \tilde{\mathcal{G}})\tilde{\psi} \right)^2 \left(1 - \epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2 + r_2(\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2) \right) = \\ & \quad \frac{\epsilon}{2} \left(\tilde{\mathcal{G}}\tilde{\psi} + \epsilon\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\psi} \right)^2 \left(1 - \epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2 \right) + \mathcal{R}(t, \mathbf{x}). \quad (2.34) \end{aligned}$$

The residual term $\mathcal{R}(t, \mathbf{x})$ is a sum of $\frac{\epsilon}{2}[(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \tilde{\mathcal{G}})\tilde{\psi}]^2 r_2(\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)$ and terms of the form $\frac{\epsilon}{2} \sum_n a_n(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} \mathcal{F}_1(t, \mathbf{x}) \mathcal{F}_2(t, \mathbf{x})$ where the coefficients a_n depend only on $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{\psi}$ and the $\mathcal{F}_j(t, \mathbf{x})$ are one of the functions $(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathcal{G} - \tilde{\mathcal{G}})\tilde{\psi}$, $r_2(\epsilon^2|\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\zeta}|^2)$ or the constant function $C(t, \mathbf{x}) = 1$. Using lemma 2.2.4 and estimate (2.10) and setting $r_0 = \min\{5-d, 1-d/2+r(n_0)\}$ we thus get the residual estimate (for $s > d/2$)

$$|\mathcal{R}(t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{r_0} C(\sum |\zeta_i^{(j)}(T)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0}}, \sum \|\zeta_i^{(j)}(T)\|_{X_1}, \sum |\psi_i^{(j)}(T)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0+1}}, \sum \|\psi_i^{(j)}(T)\|_{X_2}).$$

The other term in the right hand side of (2.34) is expanded by

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \left(\tilde{\mathcal{G}}\tilde{\psi} + \epsilon \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\psi} \right)^2 \left(1 - \epsilon^2 |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2 \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2} (\mathcal{G}_{00})^2 + \epsilon^2 \left[\mathcal{G}_{00}(\mathcal{G}_{01} + \mathcal{G}_{11}) + \mathcal{G}_{00} \nabla \zeta^{(0)} \cdot \nabla \psi^{(0)} \right] + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{\epsilon}{2} (\mathcal{A}_0 \psi^{(0)})^2 + \epsilon^2 (\mathcal{A}_0 \psi^{(0)} \mathcal{A}_1 \psi^{(0)} + \mathcal{A}_0 \psi^{(0)} \mathcal{A}_0 \psi^{(1)}) \\ &+ \epsilon^2 \left[\mathcal{A}_0 \psi^{(0)} \left[-\mathcal{A}_0(\zeta^{(0)}(\mathcal{A}_0 \psi^{(0)})) - \nabla \cdot (\zeta^{(0)} \nabla \psi^{(0)}) \right] + \mathcal{A}_0 \psi^{(0)} \nabla \zeta^{(0)} \cdot \nabla \psi^{(0)} \right] \\ &+ \epsilon^3 \mathcal{R}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

where the residual is as usual a sum of multiscale functions of the form $\mathcal{R}(t, \mathbf{x}) = \sum \mathcal{R}_n(T, \mathbf{x}') e^{in\theta}$. Counting the derivatives that fall on the coefficients $\mathcal{R}_n(T, \mathbf{x}')$ (we recall that $\tilde{\mathcal{G}}$ is the asymptotic development of \mathcal{G} up to order n_0) we get the residual estimate

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{R}_n(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} &\lesssim |A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}} (|A(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}} + |B(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+4}}) + \\ &C(\sum |\zeta_i^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0}}, \sum |\psi_i^{(j)}(T, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+n_0+1}}), \quad s > d/2. \end{aligned}$$

Expansion of $\beta(\frac{\kappa(\epsilon\tilde{\zeta})}{\epsilon} - \kappa_0(\tilde{\zeta}))$: Using (2.30) and the Taylor expansions of $(1+z)^{-1/2}$ and $(1+z)^{-3/2}$ we get the expansion of the surface tension term (in two dimensions)

$$\kappa(\zeta) = -\Delta_{\mathbf{x}} \zeta (1 - \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{x}} \zeta|^2 + r_2(|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta|^2)) + (\zeta_x^2 \zeta_{xx} + 2\zeta_x \zeta_y \zeta_{xy} + \zeta_y^2 \zeta_{yy}) (1 + r_1(|\nabla_{\mathbf{x}} \zeta|^2))$$

with r_1 and r_2 as in lemma 2.2.4.

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(\epsilon\tilde{\zeta})}{\epsilon} - \kappa_0(\tilde{\zeta}) &= \Delta_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta} \left(\frac{\epsilon^2}{2} |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2 - r_2(\epsilon^2 |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2) \right) \\ &+ \epsilon^2 (\tilde{\zeta}_x^2 \tilde{\zeta}_{xx} + 2\tilde{\zeta}_x \tilde{\zeta}_y \tilde{\zeta}_{xy} + \tilde{\zeta}_y^2 \tilde{\zeta}_{yy}) (1 + r_1(\epsilon^2 |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2)) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta} |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2 + \epsilon^2 (\tilde{\zeta}_x^2 \tilde{\zeta}_{xx} + 2\tilde{\zeta}_x \tilde{\zeta}_y \tilde{\zeta}_{xy} + \tilde{\zeta}_y^2 \tilde{\zeta}_{yy}) + \mathcal{R}^\kappa(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

By the same arguments as in lemma 2.2.4 we have the estimate

$$|\mathcal{R}^\kappa(t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}}^s} \lesssim \epsilon^{4-\frac{d}{2}} C_s \left(\sum_{i,j} |\zeta_j^{(i)}|_{H_{\mathbf{x}'}^{s+2}} \right), \quad s > \frac{d}{2}, s \in \mathbb{N}.$$

Furthermore

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon^2}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta} |\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\zeta}|^2 + \epsilon^2 (\tilde{\zeta}_x^2 \tilde{\zeta}_{xx} + 2\tilde{\zeta}_x \tilde{\zeta}_y \tilde{\zeta}_{xy} + \tilde{\zeta}_y^2 \tilde{\zeta}_{yy}) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \Delta \zeta^{(0)} |\nabla \zeta^{(0)}|^2 + \epsilon^2 ((\zeta_x^{(0)})^2 \zeta_{xx}^{(0)} + 2\zeta_x^{(0)} \zeta_y^{(0)} \zeta_{xy}^{(0)} + (\zeta_y^{(0)})^2 \zeta_{yy}^{(0)}) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.35)$$

where the residual term is a sum of multiscale functions.

The last, and a little tedious step, consists in plugging $\zeta^{(0)}$, $\psi^{(0)}$, $\zeta^{(1)}$ and $\psi^{(1)}$ given by (2.17) - (2.19) in the above expansions and to calculate all the terms explicitly. This gives the expansion of the nonlinear term. \square

2.2.3 Cancelling the small order terms

We proceed in the construction of an asymptotic solution by determining A , B and $p_i, q_i, i = 0, \dots, 2$ such that (formally) $\tilde{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = O(\epsilon^3)$. This means that we have to cancel the $O(1)$, $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^2)$ terms obtained in the expansion of the water wave equations given by proposition 2.2.1. We proceed by regrouping and cancelling these terms with respect to their harmonic order.

Cancelling the terms of **harmonic zero** (non oscillating terms) is equivalent to

$$\mathcal{L}_0^\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} + \epsilon \mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \partial_T P_0 \\ \partial_T Q_0 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} \zeta_0^{(2)} \\ \psi_0^{(2)} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} R_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

With the definitions of section 2.2.2 this leads to the system of equations

$$\begin{cases} \epsilon^2 \partial_T P_0 - g_0(\epsilon D') B + \epsilon^2 R_0 = 0, \\ \epsilon [P_0 + \partial_T B + B_0] + \epsilon^2 [\zeta_0^{(2)} + \partial_T Q_0 + S_0] = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

We take $Q_0 = 0$ and $\psi_0^{(2)} = 0$. Then we can solve the second equation by cancelling separately the terms of order $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^2)$. The second order terms are canceled by imposing

$$\zeta_0^{(2)} = -S_0.$$

Cancelling the first order terms leads, together with the first equation of (2.36), to a system of coupled equations for B and P_0 .

$$\begin{cases} \partial_T P_0 - \frac{g_0(\epsilon D')}{\epsilon^2} B = -R_0 = -2\lambda \mathbf{k} \cdot \nabla' |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -B_0 = -|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma^2) |A|^2. \end{cases} \quad (2.37)$$

We also note that

$$\frac{g_0(\epsilon D')}{\epsilon^2} = |D'| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D'|)}{\epsilon}.$$

Regrouping the terms of **second harmonics** we see that cancelling is equivalent to

$$\epsilon [\mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}] + \epsilon^2 [\mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} \zeta_2^{(2)} \\ \psi_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_T P_2 \\ \partial_T Q_2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_2'(D') \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2 \\ S_2 \end{pmatrix}] = \vec{0} \quad (2.38)$$

We solve this equation by separately cancelling the $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^2)$ terms. First, solving

$$\mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(note that \mathcal{L}_2 is an invertible matrix) leads to

$$P_2 = \frac{|\mathbf{k}|^2 [4\omega\lambda(1 - \sigma\sigma_2) + |\mathbf{k}|(1 + \sigma^2)\sigma_2]}{2|\mathbf{k}|\sigma_2\vartheta_2 - 4\omega^2} A^2 = \frac{|\mathbf{k}|^2(\sigma^2 - 3)}{2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3)} A^2, \quad \text{with } \tilde{\beta} = \beta|\mathbf{k}|^2, \quad (2.39)$$

$$Q_2 = \frac{-i|\mathbf{k}|^2 [2\vartheta_2\lambda(1 - \sigma\sigma_2) + \omega(1 + \sigma^2)]}{2|\mathbf{k}|\sigma_2\vartheta_2 - 4\omega^2} A^2 = \frac{i\omega|\mathbf{k}| \left(\frac{1+4\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}(1 - \sigma^2) + \frac{1}{2}(1 + \sigma^2)^2 \right)}{\sigma(2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3))} A^2. \quad (2.40)$$

Plugging P_2, Q_2 in the $O(\epsilon^2)$ equation and solving the remaining linear system gives then an explicit expression for $\zeta_2^{(2)}$ and $\psi_2^{(2)}$.

Cancelling the **first harmonics** is equivalent to the equation

$$\begin{aligned} \epsilon \mathcal{L}_1 \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_1(\omega, \mathbf{k} + \epsilon D') \begin{pmatrix} i\lambda A \\ A \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} i\lambda \partial_T A \\ \partial_T A \end{pmatrix} \\ + \epsilon^2 [\mathcal{L}_1 \begin{pmatrix} \zeta_1^{(2)} \\ \psi_1^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_T P_1 \\ \partial_T Q_1 \end{pmatrix} + \mathcal{L}'_1(D') \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ S_1 \end{pmatrix}] = \vec{0}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

To solve this equation we could as before try to cancel $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^2)$ terms separately. There is however another way to solve (2.41) which leads to a Benney-Roskes type of equation. For this, we consider (2.41) as a linear system of the form

$$\mathcal{L}_1 \left[\epsilon \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \zeta_1^{(2)} \\ \psi_1^{(2)} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

As the matrix \mathcal{L}_1 is not invertible one calculates that the system can be solved if and only if the right hand side satisfies

$$\vartheta A + i\omega B = 0. \quad (2.43)$$

In this case the solutions of the system are given by

$$\epsilon(\vartheta P_1 - i\omega Q_1) + \epsilon^2(\vartheta \zeta_1^{(2)} - i\omega \psi_1^{(2)}) = B. \quad (2.44)$$

Calculating the explicit expressions for A and B , (2.43) and (2.44) are equivalent to

$$\begin{cases} -2i\epsilon\vartheta\lambda c_T + g_0(\mathbf{k} + \epsilon D')\vartheta A + \lambda\omega\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')A - 2\omega^2 A \\ \quad - \epsilon^2(\vartheta\partial_T P_1 + i\omega\partial_T Q_1 - \vartheta\nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D'Q_1 + i\omega\nabla\vartheta(\mathbf{k}) \cdot D'P_1) \\ \quad - \epsilon^2(\vartheta R_1 + i\omega S_1) = 0, \\ \epsilon(\vartheta P_1 - i\omega Q_1) + \epsilon^2(\vartheta \zeta_1^{(2)} - i\omega \psi_1^{(2)}) = -i\lambda\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')A + i\omega A - \epsilon c_T \\ \quad - \epsilon^2(\partial_T Q_1 + \nabla\vartheta(\mathbf{k}) \cdot D'P_1 + S_1). \end{cases} \quad (2.45)$$

We recall that we have the relations $\omega^2(\mathbf{k}) = g_0(\mathbf{k})\vartheta(\mathbf{k})$ and $\lambda(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})/\vartheta(\mathbf{k})$.

We start by solving the second equation of (2.45) (up to third order terms). For this we expand the

terms in the right hand side of the equation and then cancel $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^2)$ terms separately.

To get the expansion of c_T we use the first equation of (2.45) together with the expansions of $g_0(\mathbf{k} + \epsilon D')$ and $\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')$ provided by lemma 2.2.1. A short calculation then leads to

$$\begin{aligned} c_T &= \frac{1}{2i\omega(\mathbf{k})} [\vartheta(\mathbf{k}) \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' A + g_0(\mathbf{k}) \nabla \vartheta(\mathbf{k}) \cdot D' A] + O(\epsilon) = -ic_g \cdot D' A + O(\epsilon) \\ &= -c_g \cdot \nabla' A + \epsilon \mathcal{R}_c(T, \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.46)$$

where $c_g = \nabla \omega(\mathbf{k})$ denotes the group velocity of the leading order wave packet.

Plugging the first order approximation of c_T in the right hand side of the second equation of (2.45) and expanding $\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')$ we furthermore get

$$-i\lambda\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')A + i\omega A - \epsilon c_T = \frac{\epsilon}{2i\omega} [g_0(\mathbf{k}) \nabla \vartheta(\mathbf{k}) \cdot D' A - \vartheta(\mathbf{k}) \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' A] + \epsilon^2(\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_\vartheta)$$

with $|\mathcal{R}_\vartheta|_{H^s} \lesssim |A|_{H^{s+2}}$.

To cancel the first order terms in the second equation of (2.45) we therefore choose

$$\vartheta P_1 - i\omega Q_1 = \frac{1}{2i\omega} [g_0(\mathbf{k}) \nabla \vartheta(\mathbf{k}) \cdot D' A - \vartheta(\mathbf{k}) \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' A]. \quad (2.47)$$

To solve the first equation of (2.45) we start by rewriting the term containing P_1 and Q_1 as follows: By a straightforward calculation using the relations $\omega^2 = g_0 \vartheta$ and $2\omega c_g = \vartheta \nabla g_0 + g_0 \nabla \vartheta$ we see that

$$\begin{aligned} \vartheta \partial_T P_1 + i\omega \partial_T Q_1 - \vartheta \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' Q_1 + i\omega \nabla \vartheta \cdot D' P_1 &= (\partial_T + ic_g \cdot D')(\vartheta P_1 + i\omega Q_1) \\ &\quad + \frac{i}{2\omega} (g_0 \nabla \vartheta - \vartheta \nabla g_0) \cdot D' (\vartheta P_1 - i\omega Q_1). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Plugging in the expression of $\vartheta P_1 - i\omega Q_1$ obtained above it follows that

$$\begin{aligned} \vartheta \partial_T P_1 + i\omega \partial_T Q_1 - \vartheta \nabla g_0(\mathbf{k}) \cdot D' Q_1 + i\omega \nabla \vartheta \cdot D' P_1 &= (\partial_T + ic_g \cdot D')(\vartheta P_1 + i\omega Q_1) \\ &\quad + \frac{1}{4\omega^2} [(g_0 \nabla \vartheta - \vartheta \nabla g_0) \cdot D']^2 A. \end{aligned} \quad (2.49)$$

With the above calculations, the first equation of (2.45) writes as

$$\begin{aligned} -2i\epsilon\vartheta\lambda c_T + g_0(\mathbf{k} + \epsilon D')\vartheta A + \lambda\omega\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D')A - 2\omega^2 A - \frac{\epsilon^2}{4\omega^2} [(g_0 \nabla \vartheta - \vartheta \nabla g_0) \cdot D']^2 A \\ - \epsilon^2 (\partial_T + ic_g \cdot D')(\vartheta P_1 + i\omega Q_1) - \epsilon^2 (\vartheta R_1 + i\omega S_1) = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

We now determine $\vartheta P_1 + i\omega Q_1$ (and therefore P_1 and Q_1 as we have already determined $\vartheta P_1 - i\omega Q_1$) by imposing

$$(\partial_T + ic_g \cdot D')(\vartheta P_1 + i\omega Q_1) = 0.$$

So $\vartheta P_1 + i\omega Q_1$ depends only on the choice of its initial value, which in the simplest case we might choose to be zero.

For shorter notation, we write

$$\tilde{\mathcal{H}}(D') = \frac{1}{4\omega^2} [(g_0 \nabla \vartheta - \vartheta \nabla g_0) \cdot D']^2.$$

To treat the other terms in (2.50) we expand $g_0(\mathbf{k} + \epsilon\xi)$, $\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon\xi)$ and $\omega(\mathbf{k} + \epsilon\xi)$ around $\xi = 0$ and use the relation $\omega^2(\mathbf{k} + \epsilon\xi) = g_0(\mathbf{k} + \epsilon\xi)\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon\xi)$. We then see that terms nicely cancel to give

$$g_0(\mathbf{k} + \epsilon\xi)\vartheta + \lambda\omega\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon\xi) - \epsilon^2\tilde{\mathcal{H}}(\xi) = 2\omega[\omega(\mathbf{k} + \epsilon\xi) - \omega(\mathbf{k})] + \epsilon^3O(\xi^3).$$

However, as $\omega(\xi)$ is not continuously differentiable in $\xi = 0$ the above expansion can only be carried out for $|\xi| < \mathbf{k}/\epsilon$. Nevertheless, for $|\xi| \geq \mathbf{k}/\epsilon$ we have the estimate

$$\left| g_0(\mathbf{k} + \epsilon\xi)\vartheta + \lambda\omega\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon\xi) - 2\omega^2 - \epsilon^2\tilde{\mathcal{H}}(\xi) - 2\omega[\omega(\mathbf{k} + \epsilon\xi) - \omega(\mathbf{k})] \right| \lesssim \epsilon^3|\xi|^3,$$

as the terms in the right hand side of this inequality are of at most quadratic growth. Therefore we can write

$$g_0(\mathbf{k} + \epsilon D')\vartheta A + \lambda\omega\vartheta(\mathbf{k} + \epsilon D') - 2\omega^2 A - \epsilon^2\tilde{\mathcal{H}}A = 2\omega[\omega(\mathbf{k} + \epsilon D') - \omega(\mathbf{k})]A + \epsilon^3\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{H}}}$$

with $|\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{H}}}|_{H^s} \lesssim |A|_{H^{s+3}}$.

Using the expressions for P_2 and Q_2 obtained by canceling the second harmonic terms we furthermore get

$$\vartheta R_1 + i\omega S_1 = -2\omega A \mathbf{k} \cdot \nabla' B - \vartheta |\mathbf{k}|^2 [1 - \sigma^2] A P_0 + \alpha |A|^2 A,$$

with (we recall that $\tilde{\beta} = \beta |\mathbf{k}|^2$)

$$\alpha = |\mathbf{k}|^4 \left[\frac{-4(1 + 4\tilde{\beta})(1 - \sigma^2)^2}{(1 + \sigma^2)(2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3))} + \frac{(1 + \tilde{\beta})(1 + \sigma^2)(3\sigma^2 - 5)}{2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3)} - \frac{2(3\sigma^4 - \sigma^2)}{1 + \sigma^2} + \frac{3\sigma^2\tilde{\beta}}{2(1 + \tilde{\beta})} \right]. \quad (2.51)$$

Remark 2.2.4. In the case $|\mathbf{k}| > 0$, one easily verifies that $\alpha < 0$ for $\beta = \tilde{\beta} = 0$ and $\alpha > 0$ for $\tilde{\beta} \rightarrow \infty$. Summing up the above calculations we obtain that the first equation of (2.45) is equivalent to

$$c_T + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega}{\epsilon} A + i\epsilon [\mathbf{k} \cdot \nabla B + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2\lambda}(1 - \sigma^2)P_0 - \frac{\alpha}{2\omega}|A|^2]A = \epsilon^2\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

To cancel the $O(\epsilon^2)$ terms we take

$$\vartheta \zeta_1^{(2)} - i\omega \psi_1^{(2)} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_\vartheta - (\partial_T Q_1 + \nabla \vartheta(\mathbf{k}) \cdot D' P_1 + S_1). \quad (2.52)$$

We can arbitrarily choose either $\zeta_1^{(2)}$ or $\psi_1^{(2)}$. For simplicity, we take $\zeta_1^{(2)} = 0$.

Finally, cancelling the **third order harmonics** is equivalent to

$$\mathcal{L}_3 \begin{pmatrix} \zeta_3^{(2)} \\ \psi_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

As \mathcal{L}_3 is an invertible matrix, this equation can be easily solved. This completes the formal construction of an asymptotic solution to the water wave equations.

2.3 Consistency of the FDBR model

In view of the preceding calculations we define the Benney-Roskes full dispersive model with surface tension by the set of equations (omitting the primes in the variables)

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i \epsilon [\mathbf{k} \cdot \nabla B + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2\lambda} (1 - \sigma^2) P_0 - \frac{\alpha}{2\omega} |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P_0 - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} B = -2\lambda \mathbf{k} \cdot \nabla |A|^2, \\ \partial_T B + P_0 = -|\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma^2) |A|^2. \end{cases} \quad (2.53)$$

We recall that $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$,

$$\omega(\xi) = [|\xi| \tanh(\sqrt{\mu} |\xi|) (1 + \beta |\xi|^2)]^{1/2}, \text{ for some } \beta \geq 0,$$

and the various constants in the equations are given by $\omega = \omega(\mathbf{k})$, $\lambda = \omega/\vartheta$ with $\vartheta = \vartheta(\mathbf{k}) = 1 + \beta |\mathbf{k}|^2$, $\sigma = \tanh(\sqrt{\mu} |\mathbf{k}|)$ and α as defined in (2.51).

Assuming that a solution to (2.53) exists¹ in an appropriate Sobolev space on a time interval of length $O(\epsilon^{-1})$, we have the following consistency result.

Proposition 2.3.1. *Let $s \in \mathbb{N}_0$, $t_0 > d/2$, $T_0 > 0$, $n_0 \geq 3$ as in proposition 2.2.1 and $(A, B, P_0) \in C([0, \frac{T_0}{\epsilon}]; H^{(s \vee t_0) + n_0 + 2}(\mathbb{R}^d)^3)$ be a solution to (2.53). Then the approximate solution $\tilde{U} = (\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$ constructed in section 2.2 is consistent with the water wave equations (2.1) in the sense that*

$$\mathcal{L}(\tilde{U}) + \mathcal{N}(\tilde{U}) = \epsilon^3 \sum_{n=-N}^N \mathcal{R}_{3n}(\epsilon t, \epsilon \mathbf{x}) e^{in\theta} + \epsilon^{r(n_0)} \mathcal{R}_4(t, \mathbf{x})$$

for some $N = N(n_0) \geq 4$. The residual terms are controlled, for all $0 \leq t \leq T_0/\epsilon^2$, by

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\mathcal{R}_{3n}(\epsilon t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}'}^s} + |\mathcal{R}_4(t, \cdot)|_{H_{\mathbf{x}}^s} &\lesssim \\ C \left(|(A, B, P_0)|_{L^\infty([0, \frac{T_0}{\epsilon}]; H^{(s \vee t_0) + n_0 + 2})}, \sum \|\zeta_i^{(j)}\|_{L^\infty([0, \frac{T_0}{\epsilon}]; X_1)}, \sum \|\psi_i^{(j)}\|_{L^\infty([0, \frac{T_0}{\epsilon}]; X_2)} \right). \end{aligned}$$

$r(n_0)$ and the function spaces X_1 and X_2 are defined as in (2.10).

Remark 2.3.1. The size of the residual terms should be at least of order $O(\epsilon_0^{r_0})$ for some $r_0 > 2$, such that the accumulated error over the time scale $t = O(\epsilon^{-2})$, on which the FDBR is supposed to describe the dynamics of the wave packet, stays small. One should therefore choose n_0 large enough such that $r(n_0) > 2$.

The $H_{\mathbf{x}}^s$ -norm of the first part of the residual (the sum of multiscale functions) is of order $O(\epsilon^{3-d/2})$ due to the scaling of the L^2 -norm. The accumulated error is then of size $O(\epsilon^{1-d/2})$. This is small in dimension $d = 1$, but not in dimension $d = 2$. In two dimensions, the above estimates are therefore too rough to provide a justification of the FDBR model, and a finer analysis is required (see remark 8.14 of [Lan13]).

¹Wellposedness of (2.53) will be studied in the next chapter of this thesis.

Proof of proposition 2.3.1. This proposition is a direct consequence of the residual estimate given in proposition 2.2.1 and the construction of the asymptotic solution $(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$ in terms of A , B and P_0 in the preceding section. More precisely, the asymptotic solution satisfies

$$\tilde{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} + \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi}) = \epsilon^3 \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{H}} \\ \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{\vartheta} \end{pmatrix},$$

where \mathcal{R}_c is defined as in (2.46) and where we use the first equation of (2.53) as defining equation for the function A .

Then, by estimating the norms of $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$, \mathcal{R}_c and \mathcal{R}_{ϑ} and the terms of the asymptotic solution $(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$, we get the above consistency result. For the sake of completeness, we gather here the estimates that allow us to control the norm of $(\tilde{\zeta}, \tilde{\psi})$ in terms of A , B and P_0 . We suppose for these estimates that we have chosen $\vartheta P_1 + i\omega Q_1 = 0$ and that $s > d/2$.

Reviewing the construction of the asymptotic solution we first see that $Q_0 = 0$ and $\zeta_0^{(2)} = -S_0$. So using the definition of S_0 (see proposition 2.2.1) we get the estimate

$$|\zeta_0^{(2)}|_{H^s} \leq C(|Q_1|_{H^s}, |A|_{H^{s+1}})$$

Furthermore, we have taken $\psi_0^{(2)} = 0$.

Next, using (2.39) and (2.40) we get

$$|P_2|_{H^s} \lesssim |A|_{H^s}^2, \quad |Q_2|_{H^s} \lesssim |A|_{H^s}^2.$$

From (2.38) we get that

$$\begin{pmatrix} \zeta_2^{(2)} \\ \psi_2^{(2)} \end{pmatrix} = -\mathcal{L}_2^{-1} \left[\begin{pmatrix} \partial_T P_2 \\ \partial_T Q_2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_2'(D') \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \right].$$

Using the definition of R_2 and S_2 of proposition 2.2.1 gives

$$|R_2|_{H^s} \leq C(|A|_{H^{s+1}}, |P_1|_{H^s}), \quad |S_2|_{H^s} \leq C(|A|_{H^{s+1}}).$$

Therefore

$$|\zeta_2^{(2)}|_{H^s} \leq C(|A|_{H^{s+1}}, |c_T|_{H^s}, |P_1|_{H^s}), \quad |\psi_2^{(2)}|_{H^s} \leq C(|A|_{H^{s+1}}, |c_T|_{H^s}, |P_1|_{H^s}).$$

With the first equation of (2.53) we furthermore get that

$$|c_T|_{H^s} \leq |A|_{H^{s+1}} + \epsilon C(|B|_{H^{s+1}}, |A|_{H^s}, |P_0|_{H^s}).$$

With equation (2.47) we get that

$$|P_1|_{H^s} \lesssim |A|_{H^{s+1}}, \quad |Q_1|_{H^s} \lesssim |A|_{H^{s+1}}.$$

This allows us to complete the estimate of $\zeta_2^{(2)}$ and $\psi_2^{(2)}$ in terms of A , B and P_0 .

We pass to the first harmonic second order terms. Using equation (2.52) we get

$$|\psi_1^{(2)}|_{H^s} \leq C(|\mathcal{R}_c|_{H^s}, |\mathcal{R}_{\vartheta}|_{H^s}, |P_1|_{H^{s+1}}, |Q_1|_{H^{s+1}}, |R_1|_{H^s}).$$

Furthermore, with the definition of R_1 and S_1 we get

$$|R_1|_{H^s} \leq C(|B|_{H^{s+1}}, |A|_{H^s}, |P_0|_{H^s}), \quad |S_1|_{H^s} \leq C(|B|_{H^{s+1}}, |A|_{H^s}).$$

Using the final equation determining A (the first equation of (2.53)) and recalling the definition of \mathcal{R}_c by (2.46) we then get the following control of the norm of \mathcal{R}_c

$$|\mathcal{R}_c|_{H^s} \leq C(|A|_{H^{s+2}}, |P_0|_{H^s}, |B|_{H^{s+1}}).$$

We also recall that

$$|\mathcal{R}_\vartheta|_{H^s} \lesssim |A|_{H^{s+2}}.$$

Therefore

$$|\psi_1^{(2)}|_{H^s} \lesssim C(|A|_{H^{s+2}}, |B|_{H^{s+1}}, |P_0|_{H^s}).$$

Finally, with the definition of R_3 and S_3 we easily get

$$|\zeta_2^{(3)}|_{H^s} \lesssim |A|_{H^s}^3, \quad |\psi_2^{(3)}|_{H^s} \lesssim |A|_{H^s}^3.$$

□

Chapter 3

The Cauchy problem for the full dispersion Benney-Roskes system

In this chapter we consider the wellposedness of the Benney-Roskes type asymptotic model (2.53) that was derived in the previous chapter. Without loss of generality, we assume that the wave trains travel in X -direction, with wave vector $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_X$. The full dispersion Benney-Roskes (FDBR) is then given by

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon[|\mathbf{k}|\partial_X B + \frac{\vartheta|\mathbf{k}|^2}{2\omega}(1 - \sigma^2)P - \frac{\alpha}{2\omega}|A|^2]A = 0, \\ \partial_T P - |D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}B = -2\frac{\omega}{\vartheta}|\mathbf{k}|\partial_X|A|^2, \\ \partial_T B + P = -|\mathbf{k}|^2(1 - \sigma^2)|A|^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

where $A(T, \mathbf{X})$ is a complex valued function, $P(T, \mathbf{X})$ and $B(T, \mathbf{X})$ are real valued functions, with $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ where $\mathbf{X} = (X, Y)$ for $d = 2$ or $\mathbf{X} = X$ for $d = 1$. The dispersion relation $\omega(\mathbf{k})$ is defined in (2.13) and we recall that

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) = [|\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(1 + \beta|\mathbf{k}|^2)]^{1/2}.$$

Furthermore, $\vartheta = \vartheta(\mathbf{k}) = 1 + \beta|\mathbf{k}|^2$, $\sigma = \sigma(\mathbf{k}) = \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)$ and the constant α which depends only on $|\mathbf{k}|$, β and μ is defined in (2.51). We also recall that the parameters μ et β , which are defined in (1.29), satisfy $\mu \geq \mu_0 > 0$ and $\beta \geq 0$. β measures the strength of surface tension.

The Fourier multiplier operators $\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}$ and $|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}$ are defined by

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} f &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon \xi) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} \mathcal{F} f(\xi) \right], \\ |D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} f &= \mathcal{F}^{-1} \left[|\xi|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|)}{\epsilon} \mathcal{F} f(\xi) \right], \end{aligned}$$

where \mathcal{F} denotes the Fourier transform and ξ denotes the dual Fourier variable of \mathbf{X} .

The standard Benney-Roskes system is deduced from (3.1) by approximating $\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}$ and $|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}$ by their second order Taylor expansions.

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} &\approx \omega' D_X + \frac{\epsilon}{2}(\omega'' D_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} D_Y^2) = -i\omega' \partial_X - \frac{\epsilon}{2}(\omega'' \partial_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} \partial_Y^2), \\ |D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} &\approx \sqrt{\mu}|D|^2 = -\sqrt{\mu}\Delta. \end{aligned}$$

We use here the notation

$$\omega' = \frac{d\tilde{\omega}}{dr}|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \omega'' = \frac{d^2\tilde{\omega}}{dr^2}|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \text{with } \tilde{\omega}(r) = [r \tanh(\sqrt{\mu}r)(1 + \beta r^2)]^{1/2}. \quad (3.2)$$

The notations for derivatives, function spaces, etc. are the same as in the preceding chapter and we refer to section 2.1.1.

We also recall from remark 1.3.1 of the introduction that the standard Benney-Roskes system, which was first derived in the context of gravity water waves in [BR69], is a particular case of an universal system describing the interaction of spectrally narrow high-frequency wave packets of small amplitude with low-frequency acoustic type oscillations. This universal system was derived, independently of the Benney-Roskes system, by Zakharov and Rubenchik [ZR72]. The Zakharov-Rubenchik system is given by

$$\begin{cases} i\partial_t A + i\omega' \partial_x A + \frac{\omega''}{2} \partial_x^2 A + \frac{\omega'}{2|\mathbf{k}|} \Delta_{\perp} A - (\alpha_1 \partial_x B + \alpha_2 P + q|A|^2) A = 0, \\ \partial_t P + \rho_0 \Delta B + \alpha_1 \partial_x |A|^2 = 0, \\ \partial_t B + \frac{c^2}{\rho_0} P + \alpha_2 |A|^2 = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

where $A = A(t, \vec{x})$ (with $\vec{x} = (x, y, z)$ or $\vec{x} = (x, y)$) denotes the complex amplitude of the high frequency wave packet whose wave number $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_x$ and frequency ω are related by some dispersion relation $\omega = \omega(\mathbf{k})$. P and B respectively denote the density fluctuation and the hydrodynamic potential. ρ_0 is the mean density. Furthermore, $\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2$ or $\Delta_{\perp} = \partial_y^2$, and Δ denotes the Laplace operator with respect to all space variables. The constants q, α measure the self-interaction of the carrying wave packet and the Doppler shift respectively.

3.1 Idea of the proof of local well-posedness

To the author's knowledge, nothing is known about the wellposedness of the Cauchy problem for (3.1). The local well-posedness of (3.3) is studied in [PS05] by G. Ponce and J.-C. Saut. The authors first solve the system for P and B given by the second and third equation of (3.3). This is easily done as the system is linear with respect to B and P . The solution is given by

$$\begin{aligned} P(t) &= U'(t)P_0 + U(t)P_1 + \int_0^t U(t-t')(\alpha_2 \rho_0 \Delta |A|^2(t') - \alpha_1 |A|_{xt}^2(t')) dt', \\ B(t) &= U'(t)B_0 + U(t)B_1 + \int_0^t U(t-t')\left(\frac{\alpha_1 c^2}{\rho_0} |A|_x^2(t') - \alpha_2 |A|_t^2(t')\right) dt', \end{aligned}$$

where

$$U(t)f = \frac{\sin(c|D|t)}{c|D|}f, \quad U'(t)f = \cos(c|D|t)f$$

and $P_0 = P|_{t=0}$, $B_0 = B|_{t=0}$, $P_1 = -\rho_0 \Delta B_0 - \alpha_1 \partial_x |A_0|^2$, $B_1 = -\frac{c^2}{\rho_0} P_0 - \alpha_2 |A_0|^2$.

The solution $P = P(A)$, $B = B(A)$ is plugged in the first equation of the Zakharov/Rubenchik system. That way one obtains a scalar nonlinear Schrödinger-type equation for A

$$i\partial_t A + i\mathcal{L}A = i\mathcal{N}(P_0, B_0, A)$$

whose nonlinearity involves nonlocal terms and derivatives of the unknown function A (consider for instance the term $U(t-t')\Delta |A|^2 = -\frac{\sin(c|D|(t-t'))}{c|D|}|D|^2|A|^2$), such that controlling the H^s -norm

of the nonlinearity requires a bound on the H^{s+1} -norm of A . Next, Ponce and Saut use a local smoothing property of the second order differential operator \mathcal{L} to control the loss of derivative in the nonlinearity and apply the usual contraction argument to prove local existence of solutions to (3.3) in Sobolev space.

The method of Ponce and Saut fails however in the case of equation (3.1). As the nonlocal operator $\frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon D)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}$ is only of order $|\xi|^{1/2}$ for zero surface tension, and $|\xi|^{3/2}$ if surface tension is positive, dispersion is weaker than in the classical case. The local smoothing effect that allowed to control the loss of derivative in (3.3) is therefore not available for the system (3.1).

To prove the local well-posedness of (3.1) we will therefore apply another approach which is inspired by a paper of Schochet and Weinstein [SW86] on the nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations. In this paper the authors study the initial value problem for the Zakharov system

$$\begin{cases} i\partial_t E + \Delta E - nE = 0, \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \Delta(n + |E|^2) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

where $n(t, x)$ and $E(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ are the unknown functions and c is some parameter which might go to infinity.

The method of Schochet and Weinstein consists in writing (3.4) as a dispersive perturbation of a quasilinear symmetric hyperbolic system under the form

$$\partial_t \mathbf{U} + \sum_{j=1}^d (A^j(\mathbf{U}) + cB^j)\partial_{x_j} \mathbf{U} + C(\mathbf{U})\mathbf{U} = K\Delta \mathbf{U}. \quad (3.5)$$

Here, $\mathbf{U} = (U, V, F, G, H, L)^T$ with $U = n + |E|^2$, $V = -\frac{1}{c}\Delta^{-1}\nabla\partial_t n$, $\sqrt{2}E = F + iG$, $\sqrt{2}\nabla E = H + iL$, A^j and B^j are symmetric matrices, and K is an antisymmetric matrix. Classical local solutions are then constructed by the usual iteration scheme for quasilinear hyperbolic systems, where the authors use the fact that the dispersive term $K\Delta \mathbf{U}$ does not contribute to the energy of the system as K is antisymmetric and therefore

$$\int_{\mathbb{R}^d} K\Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \, dx = 0. \quad (3.6)$$

The interest of this method in the context of the Zakharov system is that the existence time of local solutions constructed this way does not depend on the parameter c . This allows to consider the limit $c \rightarrow \infty$.

In this chapter we will apply the Schochet-Weinstein method to study the initial value problem for (3.1). As their method only uses the fact that the terms on the right hand side of (3.5) satisfy equation (3.6), one can replace $K\Delta$ by any linear operator \mathcal{D} such that

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{D}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \, dx = 0.$$

In our case, \mathcal{D} contains the nonlocal dispersive operators of (3.1).

We note however that we will not be able to solve exactly the equations (3.1), but a modified system that (formally) differs from (3.1) only by some $O(\epsilon^2)$ terms. More precisely, we will first consider an approximation which is obtained by inserting the expansion

$$|D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} = -\sqrt{\mu}\Delta + O(\epsilon^2)$$

in the second equation of (3.1) and omitting the $O(\epsilon^2)$ terms. This approximation allows to "restore" the symmetric hyperbolic character of the acoustic type equations for P and B ; and it can be justified in the sense that the modified system has the same error of consistency as the full dispersion Benney-Roskes system (3.1). Moreover, we keep the operator $\frac{\omega(\mathbf{k}+\epsilon D)-\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}$ in the first equation of (3.1), which means that the modified system still preserves the exact dispersion relation of the full water wave equations.

Furthermore, we will have to use an approximation for the evolution of $|A|^2$, namely

$$|A|_T^2 + \omega' |A|_X^2 = i \frac{\epsilon}{2} (\omega'' A_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} A_{YY}) \bar{A} - i \frac{\epsilon}{2} (\omega'' \bar{A}_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} \bar{A}_{YY}) A + O(\epsilon^2).$$

This approximation comes from the expansion of the equality

$$|A|_T^2 = -i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A \bar{A} + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} \bar{A} A,$$

which is obtained by multiplying the first equation of (3.1) by \bar{A} and taking the real part.

The rest of this chapter is organized as follows. We will first consider the one dimensional case $d = 1$, $\mathbf{X} = X$. Using the above approximations and adapting the method of Schochet-Weinstein, we will rewrite the one dimensional FDBR system as a quasilinear symmetric hyperbolic system with dispersive perturbation and show local well-posedness in H^s , $s > 3/2$. Recall that local well-posedness is however not sufficient to justify consistency of the FDBR model with the water wave equations. For this, we need to show that the FDBR system is well-posed on the $O(\epsilon^{-1})$ time scale. By further modifications of the 1D FDBR, which do not change consistency, we obtain a system whose solutions indeed exist on the long time scale.

We then turn to the study of the two dimensional case. We first show local well-posedness in Sobolev space for the two or three dimensional Zakharov-Rubenchik system (1.41) in the "elliptic" case $\text{sign}(\omega'') = \text{sign}(\omega')$ by the Schochet-Weinstein method. This provides an alternative proof to the result of Ponce and Saut.¹ An analogous result is given for the two dimensional FDBR system. However, we do not obtain well-posedness on the $O(\epsilon^{-1})$ time scale, as the modifications we applied in the one dimensional case do not generalize to higher dimensions.

Before turning to the 1D case, we introduce some notation. We set

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta}{2\omega} |\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma^2), \quad \gamma_2 = -\frac{\alpha}{2\omega}. \quad (3.7)$$

As discussed above, we consider the approximation

$$|D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} \approx -\sqrt{\mu} \Delta.$$

With this approximation and the above notations, the system (3.1) writes

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i \epsilon [|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P + \sqrt{\mu} \Delta B + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 = 0, \\ \partial_T B + P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

We are interested in the Cauchy problem for (3.8). We start with the 1D case $\mathbf{X} = X$.

¹However, the method of Ponce and Saut also works in the case $\text{sign}(\omega'') = -\text{sign}(\omega')$. Furthermore, as they use the local smoothing effect of the dispersive operator they obtain solutions with lower regularity. They show that $(A, P, B) \in C([0, T_0]; H^s \times H^{s-1/2} \times H^{s+1/2})$ for $s > d/2$, whereas our proof gives $(A, P, B_X) \in C([0, T_0]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ for $s > d/2 + 1$.

3.2 Wellposedness of the one dimensional full dispersion Benney-Roskes system

For $X \in \mathbb{R}$, we search $A = A(T, X)$, $B = B(T, X)$, $P = P(T, X)$ satisfying the system

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon[|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P + \sqrt{\mu} \partial_{XX} B + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 = 0, \\ \partial_T B + P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

We want to use the approach of Schochet-Weinstein and try to write (3.9) as a *symmetric hyperbolic first order system with dispersive perturbation*. We start with the study of the equations for B and P .

3.2.1 Rewriting the second and third equation of the FDBR system

We consider the system

$$\begin{cases} \partial_T P + \sqrt{\mu} \partial_{XX} B + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 = 0, \\ \partial_T B + P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

As the system is linear with respect to P and B , we can directly calculate its solution. This calculation is not necessary for the method of Schochet-Weinstein, but for the sake of completeness and to illustrate the difficulties with the "loss of derivative" in A we will give the solution here. For notational convenience we set $\sqrt{\mu} = c^2$. We first note that we can decouple the equations for P and B by applying a derivative in T to both equations. This gives

$$\begin{aligned} \partial_{TT} P - c^2 \partial_{XX} (P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2) + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_{XT} |A|^2 &= 0, \\ \partial_{TT} B - c^2 \partial_{XX} B - 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 \partial_T |A|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

So P and B both satisfy a 1+1 dimensional inhomogeneous wave equation. Solving the wave equation with initial conditions $P(0, X) = P_0(X)$, $B(0, X) = B_0(X)$ and

$$P_1(X) = \partial_T P(0, X) = -\sqrt{\mu} \frac{d^2 B_0}{dX^2} - 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \frac{d}{dX} |A_0|^2, \quad B_1(X) = \partial_T B(0, X) = -P_0 - 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A_0|^2,$$

where $A_0(X) = A(0, X)$ gives

$$\begin{aligned} P(T, X) &= \frac{1}{2} [P_0(X + cT) + P_0(X - cT)] + \frac{1}{2c} \int_{X-cT}^{X+cT} P_1(X') dX' \\ &\quad + \frac{\omega}{\vartheta c} \int_0^T \int_{X-c(T-T')}^{X+c(T-T')} c^2 \gamma_1 \partial_{XX} |A|^2(T', X') - |\mathbf{k}| \partial_{XT} |A|^2(T', X') dX' dT', \end{aligned}$$

and a similar formula for $B(T, X)$. The first equation of (3.9) only depends on $U = \gamma_1 P + |\mathbf{k}| \partial_X B$, which is given by

$$\begin{aligned} U(T, X) &= C(P_0, B_0, A_0) \\ &\quad + \frac{\omega}{\vartheta c} \int_0^T \int_{X-c(T-T')}^{X+c(T-T')} (c^2 \gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2) \partial_{XX} |A|^2(T', X') - 2 |\mathbf{k}| \gamma_1 \partial_{XT} |A|^2(T', X') dX' dT'. \end{aligned}$$

For the integral term in U , we can easily carry out the integration with respect to the spatial variable, and then partially integrate along the characteristic curves of the wave equation. This leads to

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{X-c(T-T')}^{X+c(T-T')} (c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2) \partial_{XX} |A|^2(T', X') - 2|\mathbf{k}|\gamma_1 \partial_{XT} |A|^2(T', X') \, dX' dT' \\ &= -4|\mathbf{k}|\gamma_1 |A|^2(T, X) - 2\gamma_1 |\mathbf{k}| |A_0|^2(X + cT) - 2\gamma_1 |\mathbf{k}| |A_0|^2(X - cT) \\ &+ \int_0^T (c\gamma_1 - |\mathbf{k}|)^2 \partial_X |A|^2(T', X + c(T - T')) - (c\gamma_1 + |\mathbf{k}|)^2 \partial_X |A|^2(T', X - c(T - T')) \, dT'. \end{aligned}$$

Inserting the solution for U in the first equation of (3.9) we get an evolution equation for A under the form

$$\partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + \epsilon N(A, A_X) = 0,$$

where the nonlinearity $N(A, A_X)$ contains terms where a X -derivative falls on A . The equation for A is therefore not semilinear which complicates its analysis, especially as the dispersion of the linear equation is not very strong, so one does not expect a sufficient regularizing effect to control the derivative term.

As the direct calculation of P and B seems not very convenient, we will now present the method based on the paper of Schochet-Weinstein.

Let $Q = B_X$ and apply a derivative in X to the second equation of (3.11). One gets

$$\begin{aligned} \partial_{TT} P - c^2 \partial_{XX} (P + 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2) + 2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_{XT} |A|^2 &= 0, \\ \partial_{TT} Q - c^2 \partial_{XX} Q - 2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_{XX} |A|^2 + 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 \partial_{XT} |A|^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

It will become apparent later on why the decoupling of the unknowns via the wave equation is useful. As before, we set

$$U = |\mathbf{k}|Q + \gamma_1 P.$$

Then, using (3.12), U satisfies the wave equation

$$\partial_{TT} U - c^2 \partial_{XX} U - 2\frac{\omega}{\vartheta} ((c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2) \partial_{XX} - 2\gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_{XT}) |A|^2 = 0. \tag{3.13}$$

As we want to write (3.9) as a first order hyperbolic system, we now introduce a first order system equivalent to (3.13). For this, we define an auxiliary function V by

$$\partial_T V = c \partial_X U + 2\frac{\omega}{\vartheta c} (c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2) \partial_X |A|^2.$$

We then can express the equation (3.13) in terms of U and V as

$$\partial_T (\partial_T U - c \partial_X V + 4\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2) = 0.$$

Integrating in T , we get

$$\partial_T U - c \partial_X V + 4\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 = \text{const} = 0,$$

if we suppose that U , V and A and their derivatives vanish for $|X| \rightarrow \infty$.

The second order system (3.13) is therefore equivalent to the following symmetric hyperbolic first order system in U and V

$$\begin{cases} \partial_T U - c \partial_X V + 4\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 = 0, \\ \partial_T V - c \partial_X U - 2\frac{\omega}{\vartheta c} (c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2) \partial_X |A|^2 = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Remark 3.2.1. 1. At this point it might be unclear why the detour by the auxiliary functions U and V is necessary. Setting $Q = cB_X$ and applying a derivative to the second equation of (3.10) one could also directly obtain a first order symmetric hyperbolic system of the form

$$\begin{cases} \partial_T P + c\partial_X Q + 2\frac{\omega}{\vartheta}|\mathbf{k}|\partial_X|A|^2 = 0, \\ \partial_T Q + c\partial_X P + 2\frac{\omega c}{\vartheta}\gamma_1\partial_X|A|^2 = 0. \end{cases}$$

This approach has some inconveniences which would appear later in the calculations. Firstly, P and Q stay coupled in this system which creates some problems as we will have to scale P and Q independently. Secondly, this approach does not generalize to higher dimensions (a case that we will also treat below for the Zakharov-Rubenchik system and the 2D FDBR system). However we will see below that the above way of rewriting the system for P and B proves useful if we add some $O(\epsilon)$ order terms which do not change consistency of the 1D FDBR system. For this modified system, we will be able to show well-posedness on an $O(\epsilon^{-1})$ time scale (contrarily to general method for the non-modified system which only gives local well-posedness).

2. What happens if we don't use the approximation for the nonlocal operator $|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon}$? Indeed, one could write

$$|D|\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} = \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon|D|}|D|^2 = -\frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon|D|}\partial_{XX},$$

and set $c(D)^2 = \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon|D|}$. Then $c(D)$ is well defined, and by the same calculations as above one could obtain a symmetric hyperbolic first order system similar to (3.14) with c replaced by $c(D)$. The dependence of c on D is not important, as $c(D)$ is self-adjoint and bounded on $L^2(\mathbb{R})$. However, the inverse $c^{-1}(D)$ is not bounded on L^2 , which leads to some problems with the term $\omega/c\vartheta$ in the second equation of (3.14). However, as $c^{-1}(D)$ gets unbounded only for very high frequencies of at least order $O(\epsilon^{-1})$, one might try to apply some regularization argument to avoid the approximation of the nonlocal operator.

3.2.2 Coming back to the complete system

With respect to the new variables U and V , the complete full dispersion Benney-Roskes system (3.9) is given by

$$\begin{cases} \partial_T A + i\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}A + i\epsilon[U + \gamma_2|A|^2]A = 0, \\ \partial_T U - c\partial_X V + 4\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1|\mathbf{k}|\partial_X|A|^2 = 0, \\ \partial_T V - c\partial_X U - 2\frac{\omega}{\vartheta c}(c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2)\partial_X|A|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

The following observation will finally allow us to write (3.15) as a symmetric hyperbolic system with dispersive perturbation: Multiplying the first equation of (3.15) by \bar{A} and taking the real part we get

$$|A|_T^2 = -i\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}A\bar{A} + i\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}\bar{A}A$$

By Taylor expansion of the nonlocal operator this leads to

$$|A|_T^2 + \omega'|A|_X^2 = i\epsilon\frac{\omega''}{2}A_{XX}\bar{A} - i\epsilon\frac{\omega''}{2}\bar{A}_{XX}A + O(\epsilon^2). \quad (3.16)$$

We will use this equation below.

Following Schochet-Weinstein [SW86], we now decompose the first equation of (3.15) in its real and imaginary part. To this end, let

$$A = F + iG.$$

We note that $\omega(\mathbf{k} + \epsilon D)$ is not an even function, so that it does not map real functions to real functions. To separate real and imaginary part we first define

$$\mathcal{P}_1(D) = \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) + \omega(\mathbf{k} - \epsilon D)}{2\epsilon}, \quad \mathcal{P}_2(D) = \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k} - \epsilon D)}{2\epsilon}.$$

Then $\frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D)}{\epsilon} = \mathcal{P}_1(D) + \mathcal{P}_2(D)$, and $\mathcal{P}_1(\xi) = \mathcal{P}_1(-\xi)$, $\mathcal{P}_2(\xi) = -\mathcal{P}_2(-\xi)$ so that $\mathcal{P}_1(D)$ maps real functions to real functions, and $\mathcal{P}_2(D)$ maps real functions to complex valued functions.

Then decomposing the first equation in real and linear part gives

$$\begin{cases} \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}G - \epsilon[U + \gamma_2(F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}F + \epsilon[U + \gamma_2(F^2 + G^2)]F = 0, \\ \partial_T U - c\partial_X V + 4\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1|\mathbf{k}|\partial_X|A|^2 = 0, \\ \partial_T V - c\partial_X U - 2\frac{\omega}{\vartheta c}(c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2)\partial_X|A|^2 = 0. \end{cases}$$

Now perform the nonlinear change of variables $U = W - \frac{1}{\omega''}|A|^2$. Then in the new variables

$$\begin{cases} \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}G - \epsilon[W + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}F + \epsilon[W + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(F^2 + G^2)]F = 0, \\ \partial_T W - c\partial_X V - \frac{1}{\omega''}(\partial_T|A|^2 + \omega'\partial_X|A|^2) + (4\frac{\omega|\mathbf{k}|\gamma_1}{\vartheta} + \frac{\omega'}{\omega''})\partial_X|A|^2 = 0, \\ \partial_T V - c\partial_X W + (\frac{c}{\omega''} - 2\frac{\omega}{\vartheta c}(c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2))\partial_X|A|^2 = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

We furthermore introduce $A_X = H + iL$. Then, using (3.16),

$$|A|_T^2 + \omega'|A|_X^2 = i\epsilon\frac{\omega''}{2}A_{XX}\bar{A} - i\epsilon\frac{\omega''}{2}\bar{A}_{XX}A + O(\epsilon^2) \approx \epsilon\omega''(H_XG - L_XF).$$

The $O(\epsilon^2)$ terms in the above expansion can be neglected without changing consistency of the system. Furthermore we have

$$|A|_X^2 = 2HF + 2LG.$$

We apply a derivative in X to the first equation of (3.17) and plug in the expressions of $|A|_T^2 + \omega'|A|_X^2$ and $|A|_X^2$ in terms of H and G . This leads to the huge system of equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T H + i\mathcal{P}_2(D)H - \mathcal{P}_1(D)L + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}L - \epsilon W_X G \\ \quad - \epsilon[WL + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(2(FH + GL)G + (F^2 + G^2)L)] = 0, \\ \partial_T L + i\mathcal{P}_2(D)L + \mathcal{P}_1(D)H - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}H + \epsilon W_X F \\ \quad + \epsilon[WH + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(2(FH + GL)F + (F^2 + G^2)H)] = 0, \\ \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}G - \epsilon[W + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}F + \epsilon[W + (\gamma_2 - \frac{1}{\omega''})(F^2 + G^2)]F = 0, \\ \partial_T W - c\partial_X V - \epsilon H_X G + \epsilon L_X F + 2(4\frac{\omega|\mathbf{k}|\gamma_1}{\vartheta} + \frac{\omega'}{\omega''})(HF + LG) = 0, \\ \partial_T V - c\partial_X W + 2(\frac{c}{\omega''} - 2\frac{\omega}{\vartheta c}(c^2\gamma_1^2 + |\mathbf{k}|^2))(HF + LG) = 0. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

We note that (3.18) has the nice structure of a symmetric hyperbolic quasilinear system with dispersive perturbation: Introducing $\mathbf{U} = (H, L, F, G, W, V)^T \in \mathbb{R}^6$ we see that the system (3.18) can be written under the form

$$\mathbf{U}_T + (\epsilon\mathcal{A}(\mathbf{U}) - c\mathcal{B})\mathbf{U}_X + \mathcal{C}(\mathbf{U})\mathbf{U} = -\mathcal{D}\mathbf{U}, \quad (3.19)$$

where $\mathcal{A}(\mathbf{U})$ and \mathcal{B} are symmetric 6×6 -matrices, \mathcal{A} depends linearly on \mathbf{U} and

$$\mathcal{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & A_1(\mathbf{U}) \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ A_1^T(\mathbf{U}) & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & B_1 \end{pmatrix},$$

with

$$A_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -G & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = 0_{2 \times 2}.$$

\mathcal{D} is an antisymmetric 6×6 -matrix of the form

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{D}_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \text{with } \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} i\mathcal{P}_2 & -\mathcal{P}_1 + \omega/\epsilon \\ \mathcal{P}_1 - \omega/\epsilon & i\mathcal{P}_2 \end{pmatrix}.$$

As \mathcal{D}_1 is antisymmetric, we get

$$\text{Re}\left\{ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \, dX \right\} = 0. \quad (3.20)$$

The dispersive terms will therefore not contribute to the energy of (3.19). This allows us to apply classical energy methods for quasilinear hyperbolic systems to show the local well-posedness of (3.18). We also recall the definition of $\omega(\mathbf{k})$

$$\omega(\mathbf{k}) = [|\mathbf{k}| \tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)(1 + \beta|\mathbf{k}|^2)]^{1/2}, \quad \beta \geq 0.$$

One easily verifies that there exist constants $C_1 = C_1(|\mathbf{k}|, \epsilon, \beta)$, $C_2 = C_2(|\mathbf{k}|, \epsilon, \beta)$ such that (using the convention $\text{sign}(0) = 0$)

$$|\omega(\mathbf{k} \pm \epsilon \xi)| \leq C_1 |\xi|^{\frac{1}{2} + \text{sign}(\beta)} + C_2.$$

With the definition of \mathcal{P}_1 and \mathcal{P}_2 , we therefore obtain

$$|\mathcal{D}\mathbf{U}|_{L^2} \lesssim |\mathbf{U}|_{H^{\frac{1}{2} + \text{sign}(\beta)}}.$$

We get the following local existence theorem

Theorem 3.2.1. *Let $s > \frac{3}{2}$ and $\mathbf{U}_0 \in (H^s(\mathbb{R}))^6$. Then there exists $\mathcal{T} = \mathcal{T}(|\mathbf{U}_0|_{H^s}) > 0$ such that the system (3.18) has a unique solution*

$$\mathbf{U} \in C([0, \mathcal{T}); (H^s(\mathbb{R}))^6) \cap C^1([0, \mathcal{T}); (H^{s-1}(\mathbb{R}))^6), \quad \text{if } \beta = 0,$$

or

$$\mathbf{U} \in C([0, \mathcal{T}); (H^s(\mathbb{R}))^6) \cap C^1([0, \mathcal{T}); (H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}))^6), \quad \text{if } \beta > 0$$

with initial condition $\mathbf{U}(0, X) = \mathbf{U}_0(X)$.

Remark 3.2.2. The above local well-posedness result is not quite satisfactory as it does not provide the well-posedness of the FDBR system on the $O(\epsilon^{-1})$ time scale which is necessary in view of its justification as an asymptotic model to the water wave equations. The problematic terms that prevent the demonstration of long time well-posedness by the above method are the quadratic $HF + LG$ terms in the last two equations of (3.18). Indeed, if we rewrite (3.18) / (3.19) in terms of the slow variable $\tau = \epsilon T$, such that local well-posedness in τ corresponds to long-time well-posedness in T , we get

$$\mathbf{U}_\tau + (\mathcal{A}(\mathbf{U}) - \frac{c}{\epsilon} \mathcal{B}) \mathbf{U}_X + \frac{1}{\epsilon} \mathcal{C}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = -\frac{1}{\epsilon} \mathcal{D} \mathbf{U}. \quad (3.21)$$

The $O(\epsilon^{-1})$ coefficients of \mathcal{B} and \mathcal{D} do not pose a problem as these terms do not contribute to the energy of the quasilinear hyperbolic system, so the existence time is independent of these coefficients. The semilinear term $\frac{1}{\epsilon} \mathcal{C}(\mathbf{U}) \mathbf{U}$ is of order $O(1)$ for the contributions of the first four equations of (3.18), but of order $O(\epsilon^{-1})$ for the terms of the last two equations, so it only can be controlled on a very short time scale.

One might try to cancel the problematic quadratic terms by a nonlinear change of variables. This approach is used by Colin in [Col02] for a symmetric hyperbolic system under the form

$$\begin{cases} (\partial_t + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j} + \frac{E}{\epsilon}) u = \epsilon f(u, m) \\ (\partial_t + \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} + \frac{F}{\epsilon}) m = \frac{1}{\epsilon} g(u, u), \end{cases}$$

where the A_j and B_j are symmetric matrices, the matrices E, F are skew-symmetric and ϵ is a small parameter. To show well-posedness of this system on the $O(1)$ time scale, Colin introduces a nonlinear change of variables

$$N = m - \epsilon h(u, u),$$

where h is chosen in order to cancel the quadratic terms in the second equation of the system. In contrast to the system studied by Colin, the FDBR system (3.18) is quasilinear and contains nonlocal operators which complicates the analysis, but the search for a nonlinear change of variables

canceling the quadratic terms is an interesting issue. In this spirit, one could also try to use some ideas of [BCL05], where Bona, Colin and Lannes use a nonlinear change of variables to symmetrize a class of Boussinesq systems up to some terms that do not change consistency of the Boussinesq approximation.

Proof of theorem 3.2.1. As the dispersive perturbation does not contribute to the energy of (3.19), we can follow the classical existence proofs for solutions of quasilinear symmetric hyperbolic equations, with only very slight adaptations (cf. [Rau12] or [Maj84]).

We take a family of self-adjoint regularization operators S_θ on H^s such that $|S_\theta \mathbf{U}|_{H^s} \leq C_{\theta,s,r} |\mathbf{U}|_{H^r}$ pour tout $s, r \in \mathbb{R}$.

We construct local solutions of (3.19) by considering the regularized initial value problem

$$\begin{cases} \mathbf{U}_T^\theta - c\mathcal{B}S_\theta\partial_X\mathbf{U}^\theta + \epsilon\mathcal{A}(\mathbf{U}^\theta)S_\theta\partial_X\mathbf{U}^\theta + \mathcal{C}(\mathbf{U}^\theta)\mathbf{U}^\theta = -S_\theta\mathcal{D}\mathbf{U}^\theta, \\ \mathbf{U}^\theta(0, X) = \mathbf{U}_0(X), \quad \mathbf{U}_0 \in H^s, \quad s > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.22)$$

For $s > \frac{1}{2}$, the regularized equation is just an ODE on the Banach space $(H^s(\mathbb{R}))^6$, so for each θ there exists a unique maximal solution $\mathbf{U}^\theta \in C([0, \mathcal{T}_\theta); (H^s(\mathbb{R}))^6)$. Furthermore, $\mathcal{T}_\theta = \infty$ or $\lim_{T \rightarrow \mathcal{T}_\theta} |\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_{H^s} = \infty$.

As usual, we now use the equation to derive some θ -independent bounds in Sobolev space for the family of functions \mathbf{U}^θ . Let $V^\theta = \lambda^s \mathbf{U}^\theta$, where $\lambda^s = (1 - \Delta)^{s/2}$ denotes the Bessel potential. Applying λ^s to the regularized equation, we get

$$\begin{aligned} V_T^\theta - c\mathcal{B}S_\theta\partial_X V^\theta + \epsilon\mathcal{A}(\mathbf{U}^\theta)S_\theta\partial_X V^\theta + \epsilon([\lambda^s, \mathcal{A}(\mathbf{U}^\theta)]S_\theta\partial_X \mathbf{U}^\theta) \\ + \mathcal{C}(\mathbf{U}^\theta)V^\theta + [\lambda^s, \mathcal{C}(\mathbf{U}^\theta)]\mathbf{U}^\theta = -S_\theta\mathcal{D}V^\theta, \end{aligned}$$

with the usual notation for commutators $[F, G] = FG - GF$. We multiply this equation by V^θ , integrate in X and take its real part. With integration by parts, and using the symmetry of \mathcal{A} and \mathcal{B} , and antisymmetry of \mathcal{D} , we obtain ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ denoting the L^2 scalar product)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_T |V^\theta(T, \cdot)|_{L^2}^2 - \frac{\epsilon}{2}\langle \mathcal{A}(\partial_X \mathbf{U}^\theta)S_\theta V^\theta, V^\theta \rangle + \epsilon\langle [\lambda^s, \mathcal{A}(\mathbf{U}^\theta)]S_\theta\partial_X \mathbf{U}^\theta, V^\theta \rangle \\ + \langle \mathcal{C}(\mathbf{U}^\theta)V^\theta, V^\theta \rangle + \langle [\lambda^s, \mathcal{C}(\mathbf{U}^\theta)]\mathbf{U}^\theta, V^\theta \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

We now use the commutator estimate of Kato and Ponce (see [KP88] or [GO14])

Lemma 3.2.1 (Kato-Ponce). *Let $s \geq 0$, $f \in H^s \cap W^{1,\infty}$ and $g \in H^{s-1} \cap L^\infty$. Then*

$$|[\lambda^s, f]g|_{L^2} \leq C(|f|_{H^s}|g|_{L^\infty} + |\nabla f|_{L^\infty}|g|_{H^{s-1}}).$$

Using this estimate and equation (3.23) it follows (recall that $\mathcal{A}(\mathbf{U})$ depends linearly on \mathbf{U} , and $\mathcal{C}(\mathbf{U})$ is quadratic)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_T |V^\theta(T, \cdot)|_{L^2}^2 \lesssim \\ \left(\epsilon|\partial_X \mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty + |\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty^2 + |\partial_X \mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty |\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty \right) |V^\theta(T, \cdot)|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

For $s > 3/2$, we now construct local solutions that take values in the space

$$\mathcal{W} = \{W \in (H^s(\mathbb{R}))^6 : |W|_{H^s}^2 \leq |\mathbf{U}_0|_{H^s}^2 + 1\}.$$

As long as $\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)$ stays in \mathcal{W} , we have (using the Sobolev embedding $H^s(\mathbb{R}) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $s > 3/2$)

$$\begin{aligned} & (\epsilon |\partial_X \mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty + |\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty^2 + |\partial_X \mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty |\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_\infty) |V^\theta(T, \cdot)|_{L^2}^2 \\ & \leq (\epsilon (|\mathbf{U}_0|_{H^s} + 1) + 2(|\mathbf{U}_0|_{H^s} + 1)^2) (|\mathbf{U}_0|_{H^s} + 1)^2. \end{aligned}$$

Integrating the energy inequality (3.24) we then get

$$|\mathbf{U}^\theta(T, \cdot)|_{H^s}^2 \leq |\mathbf{U}_0|_{H^s}^2 + 2TC_{|\mathbf{U}_0|_{H^s}}, \quad (3.25)$$

for some constant $C_{|\mathbf{U}_0|_{H^s}}$ only depending on the norm of \mathbf{U}_0 . Define \mathcal{T} by $2TC_{|\mathbf{U}_0|_{H^s}} = 1/2$. Then by (3.25) and by continuity of the flow of \mathbf{U}^θ , we deduce by the bootstrap principle that for all θ and $T \in [0, \mathcal{T}]$ we have $\mathbf{U}^\theta(T, \cdot) \in \mathcal{W}$, so the solutions exist on a common time interval independent of θ and we have the uniform bound

$$|\mathbf{U}^\theta|_{L^\infty([0, \mathcal{T}]; H^s(\mathbb{R}))}^2 \leq |\mathbf{U}_0|_{H^s}^2 + 1/2.$$

The equation then gives us the uniform bound on \mathbf{U}_T^θ

$$|\mathbf{U}_T^\theta|_{L^\infty([0, \mathcal{T}]; H^{s-\max\{1, \frac{1}{2}+\text{sign}(\beta)\}})} \leq C_{|\mathbf{U}_0|_{H^s}}.$$

As the sequence (\mathbf{U}^θ) is uniformly bounded in $L^\infty([0, \mathcal{T}]; (H^s(\mathbb{R})^6)$, there exists a subsequence (\mathbf{U}^{θ_m}) which converges in the weak star topology to $\mathbf{U} \in L^\infty([0, \mathcal{T}]; (H^s(\mathbb{R})^6)$. Furthermore, by the Aubin-Lions lemma, (\mathbf{U}^{θ_m}) admits a subsequence converging strongly in $L^\infty([0, \mathcal{T}]; (H_{loc}^{s-\max\{1, \frac{1}{2}+\text{sign}(\beta)\}})^6)$ and therefore in $L^\infty([0, \mathcal{T}]; (H_{loc}^{s-\alpha})^6)$ for $0 < \alpha \leq \max\{1, \frac{1}{2} + \text{sign}(\beta)\}$. This allows to take the limit in the nonlinear terms of (3.19), such that \mathbf{U} satisfies the equation. \square

In the next section, we will modify the 1D FDBR model in order to obtain a system whose solutions exist on the long time scale. However, this approach cannot directly be generalized to the two dimensional case.

3.2.3 The modified 1D FDBR model

Reconsidering equation (2.36) of the preceding chapter, where we derived the system for P and B , we first note that the first equation of (3.10) is in fact of order $O(\epsilon^2)$, so we can add some $O(\epsilon)$ term to this equation without changing the order of consistency of the system. The second equation of (3.10) is of order $O(\epsilon)$ but we can also add some $O(\epsilon)$ term if we change the value of $\zeta_0^{(2)}$ accordingly. This will give us some flexibility in later calculations in order to derive a system whose solutions exist on an $O(\epsilon^{-1})$ time scale. So we consider the following equations

$$\begin{cases} \partial_T P + \sqrt{\mu} \partial_{XX} B + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T B + P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2 + \epsilon L_2 = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

where we are going to choose L_1 and L_2 in a convenient way.

We recall the notations $Q = B_X$ and $\sqrt{\mu} = c^2$. We then apply a X-derivative to the second equation of (3.10) to get

$$\begin{cases} \partial_T P + c \partial_X Q + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T Q + c \partial_X P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} c \gamma_1 |A|_X^2 + \epsilon c \partial_X L_2 = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

We perform the change of variables

$$P = U + \alpha_1 |A|^2, \quad Q = V + \alpha_2 |A|^2.$$

This leads to the system

$$\begin{cases} \partial_T U + c \partial_X V + \alpha_1 |A|_T^2 + (c\alpha_2 + 2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}|) |A|_X^2 + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T V + c \partial_X U + \alpha_2 |A|_T^2 + (c\alpha_1 + 2\frac{\omega}{\vartheta} c\gamma_1) |A|_X^2 + \epsilon c \partial_X L_2 = 0. \end{cases}$$

We now take α_1 and α_2 such that

$$\begin{aligned} c\alpha_2 + 2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| &= \omega' \alpha_1, \\ c\alpha_1 + 2\frac{\omega}{\vartheta} c\gamma_1 &= \omega' \alpha_2. \end{aligned}$$

This system has a unique solution iff

$$\det \begin{pmatrix} \omega' & -c \\ -c & \omega' \end{pmatrix} = (\omega')^2 - c^2 = (\omega')^2 - \sqrt{\mu} \neq 0.$$

The equation $(\omega'(|\mathbf{k}|))^2 - \sqrt{\mu} = 0$ is satisfied only for isolated values of $|\mathbf{k}|$ (cf. figures 3.2, 3.4 and 3.6 where the graph of $\omega'(|\mathbf{k}|)$ is given for different values of the surface tension coefficient β). In fact, for zero surface tension $\beta = 0$, or on the contrary if surface tension is sufficiently large, the equation $(\omega')^2 = \sqrt{\mu}$ is satisfied only for $|\mathbf{k}| = 0$.

With this choice of α_1, α_2 , we get the following system for U and V

$$\begin{cases} \partial_T U + c \partial_X V + \alpha_1 (|A|_T^2 + \omega' |A|_X^2) + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T V + c \partial_X U + \alpha_2 (|A|_T^2 + \omega' |A|_X^2) + \epsilon c \partial_X L_2 = 0. \end{cases}$$

We now use (3.16)

$$|A|_T^2 + \omega' |A|_X^2 \approx i\epsilon \frac{\omega''}{2} A_{XX} \bar{A} - i\epsilon \frac{\omega''}{2} \bar{A}_{XX} A = \epsilon \omega'' (H_X G - L_X F), \quad (3.28)$$

where we set $A_X = H + iL$ as in the preceding section.

By analogous calculations as in the preceding section, the complete 1D FDBR equations can then be written under the form

$$\begin{cases} \partial_T H + i\mathcal{P}_2(D)H - \mathcal{P}_1(D)L + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} L - \epsilon\gamma_1 U_X G - \epsilon|\mathbf{k}|V_X G \\ \quad - \epsilon[\gamma_1 UL + |\mathbf{k}|VL + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(2(FH + GL)G + (F^2 + G^2)L)] = 0, \\ \partial_T L + i\mathcal{P}_2(D)L + \mathcal{P}_1(D)H - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} H + \epsilon\gamma_1 U_X F + \epsilon|\mathbf{k}|V_X F \\ \quad + \epsilon[\gamma_1 UH + |\mathbf{k}|VH + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(2(FH + GL)F + (F^2 + G^2)H)] = 0, \\ \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} G - \epsilon[\gamma_1 U + |\mathbf{k}|V + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} F + \epsilon[\gamma_1 U + |\mathbf{k}|V + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(F^2 + G^2)]F = 0, \\ \partial_T U + c\partial_X V + \epsilon\alpha_1\omega''(H_X G - L_X F) + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T V + c\partial_X U + \epsilon\alpha_2\omega''(H_X G - L_X F) + \epsilon c\partial_X L_2 = 0. \end{cases}$$

To obtain a symmetric hyperbolic system, now take

$$L_1 = i\epsilon \frac{-\gamma_1 - \alpha_1 \omega''}{2} A_{XX} \bar{A} - i\epsilon \frac{-\gamma_1 - \alpha_1 \omega''}{2} \bar{A}_{XX} A,$$

$$L_2 = i\epsilon \frac{-|\mathbf{k}| - \alpha_2 \omega''}{2c} A_X \bar{A} - i\epsilon \frac{-|\mathbf{k}| - \alpha_2 \omega''}{2c} \bar{A}_X A.$$

This choice leads to

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T H + i\mathcal{P}_2(D)H - \mathcal{P}_1(D)L + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} L - \epsilon\gamma_1 U_X G - \epsilon|\mathbf{k}|V_X G \\ \quad - \epsilon[\gamma_1 UL + |\mathbf{k}|VL + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(2(FH + GL)G + (F^2 + G^2)L)] = 0, \\ \partial_T L + i\mathcal{P}_2(D)L + \mathcal{P}_1(D)H - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} H + \epsilon\gamma_1 U_X F + \epsilon|\mathbf{k}|V_X F \\ \quad + \epsilon[\gamma_1 UH + |\mathbf{k}|VH + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(2(FH + GL)F + (F^2 + G^2)H)] = 0, \\ \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} G - \epsilon[\gamma_1 U + |\mathbf{k}|V + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon} F + \epsilon[\gamma_1 U + |\mathbf{k}|V + (\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2|\mathbf{k}|)(F^2 + G^2)]F = 0, \\ \partial_T U + c\partial_X V - \epsilon\gamma_1(H_X G - L_X F) = 0, \\ \partial_T V + c\partial_X U - \epsilon|\mathbf{k}|(H_X G - L_X F) = 0. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

The above quasilinear system is also symmetric hyperbolic with respect to $\mathbf{U} = (H, L, F, G, U, V)^T \in \mathbb{R}^6$ and can be written under the short form

$$\mathbf{U}_T + (\epsilon\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) + c\mathcal{B})\mathbf{U}_X + \epsilon\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{U})\mathbf{U} = -\mathcal{D}\mathbf{U},$$

with

$$\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \tilde{A}_1(\mathbf{U}) \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \tilde{A}_1^T(\mathbf{U}) & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 G & -|\mathbf{k}|G \\ \gamma_1 F & |\mathbf{k}|F \end{pmatrix}.$$

By our choice of L_1 and L_2 we have canceled the problematic quadratic terms in the last two equations of the hyperbolic system, such that the semilinear term $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{U})\mathbf{U}$ is now of order $O(\epsilon)$. As a consequence, reviewing the proof of 3.2.1, we can now show that the solution of the above system exists on the $O(\epsilon^{-1})$ time scale (as in theorem 3.2.1 we have $\mathbf{U} \in C([0, \frac{\mathcal{T}_0}{\epsilon}); (H^s(\mathbb{R}))^6) \cap C^1([0, \frac{\mathcal{T}_0}{\epsilon}); (H^{s-\max\{1, \frac{1}{2}+\text{sign}(\beta)\}}(\mathbb{R}))^6)$ with $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0(|\mathbf{U}_0|_{H^s}) > 0$).

We note that we could also have chosen

$$L_1 = -i\epsilon \frac{\alpha_1 \omega''}{2} A_{XX} \bar{A} + i\epsilon \frac{\alpha_1 \omega''}{2} \bar{A}_{XX} A, \quad L_2 = -i\epsilon \frac{\alpha_2 \omega''}{2c} A_X \bar{A} + i\epsilon \frac{\alpha_2 \omega''}{2c} \bar{A}_X A.$$

Then U and V satisfy

$$\begin{aligned} \partial_T U + c\partial_X V &= 0, \\ \partial_T V + c\partial_X U &= 0, \end{aligned}$$

or, equivalently, U satisfies the homogeneous wave equation

$$\partial_{TT}U - c^2\partial_{XX}U = 0.$$

In this case, the modified FDBR system is simply given by the first equation of (3.9) coupled to the wave equation for U , i.e.

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon[U + \gamma_2|A|^2]A = 0, \\ \partial_{TT}U - c^2\partial_{XX}U = 0. \end{cases}$$

This gives a semilinear equation for A which can be solved by classical methods.

3.3 The Schochet-Weinstein method for the higher-dimensional ZR system

In this section we will show how the Schochet-Weinstein approach can be applied to the Zakharov-Rubenchik system in 2 or 3 space dimensions. Local existence for this system was already proved in [PS05] using smoothing properties of second order Schrödinger-type operators. The Schochet-Weinstein method allows to show local well-posedness without using the dispersive properties of the system. This will be of interest in the case of the FDBR system in two space dimensions, where dispersion is too weak to compensate for the "loss of derivative" in the nonlinearity. The 1+2 dimensional FDBR system will be treated in the next section.

The (nondimensionalized) Zakharov-Rubenchik system is given by

$$\begin{cases} A_t - \rho_3 A_x - i\delta A_{xx} - i\rho_1 \Delta_\perp A + i[\rho_2|A|^2 + \mathcal{W}(P + \mathcal{C}B_x)]A = 0, \\ P_t + \Delta B + \mathcal{C}|A|_x^2 = 0, \\ B_t + \frac{1}{M^2}P + |A|^2 = 0. \end{cases}$$

where $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $A = A(t, \vec{x})$ with $\vec{x} = (x, y)$ if $d = 2$ or $\vec{x} = (x, y, z)$ if $d = 3$. Furthermore $\Delta_\perp = \partial_{yy}$ if $d = 2$ and $\Delta_\perp = \partial_{yy} + \partial_{zz}$ if $d = 3$, $\Delta = \partial_{xx} + \Delta_\perp$.

The physical sens of the parameters $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \delta, \mathcal{C}, M$ and \mathcal{W} is explained in [PSS96]. We have $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \{\pm 1\}$, $\delta, \mathcal{C}, M \in \mathbb{R}$ and $\mathcal{W} \in \mathbb{R}_+$. We apply a derivative in t to the second and third equation of the system. This allows to decouple these equations

$$\begin{cases} A_t - \rho_3 A_x - i\delta A_{xx} - i\rho_1 \Delta_\perp A + i[\rho_2|A|^2 + \mathcal{W}(P + \mathcal{C}B_x)]A = 0, \\ P_{tt} - \Delta(\frac{1}{M^2}P + |A|^2) + \mathcal{C}|A|_{xt}^2 = 0, \\ B_{tt} - \frac{1}{M^2}(\Delta B + \mathcal{C}|A|_x^2) + |A|_t^2 = 0. \end{cases}$$

We now proceed as in the previous section. We set $U = \mathcal{W}P + \mathcal{W}\mathcal{C}B_x$. Then we get a coupled system for A and U

$$\begin{cases} A_t - \rho_3 A_x - i\delta A_{xx} - i\rho_1 \Delta_\perp A + i[\rho_2|A|^2 + U]A = 0, \\ U_{tt} - \frac{1}{M^2}\Delta U - \mathcal{W}\Delta|A|^2 + 2\mathcal{C}\mathcal{W}|A|_{xt}^2 - \frac{\mathcal{W}\mathcal{C}^2}{M^2}|A|_{xx}^2 = 0. \end{cases}$$

In the spirit of the 1D case above, we define an auxiliary (vector valued) function V by

$$\partial_t V = \frac{1}{M} \nabla U + \mathcal{W}M \nabla |A|^2 + \left(\frac{\mathcal{W}\mathcal{C}^2}{M} |A|_x^2, \vec{0} \right)^T,$$

where $\vec{0} = 0$ for $d = 2$ et $\vec{0} = (0, 0)$ for $d = 3$, and we consider the equivalent first order system

$$\begin{cases} A_t - \rho_3 A_x - i\delta A_{xx} - i\rho_1 \Delta_\perp A + i[\rho_2 |A|^2 + U]A = 0, \\ U_t - \frac{1}{M} \nabla \cdot V + 2\mathcal{W}\mathcal{C}|A|_x^2 = 0, \\ \partial_t V - \frac{1}{M} \nabla U - \mathcal{W}M \nabla |A|^2 - \left(\frac{\mathcal{W}\mathcal{C}^2}{M} |A|_x^2, \vec{0} \right)^T = \vec{0}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Note that the last two equations of this system are symmetric hyperbolic with respect to U and V . Now apply the change of variables $W = U + \frac{\rho_1}{2} |A|^2$. In the new variables the system is then given by

$$\begin{cases} A_t - \rho_3 A_x - i\delta A_{xx} - i\rho_1 \Delta_\perp A + i[(\rho_2 - \frac{\rho_1}{2})|A|^2 + W]A = 0, \\ W_t - \frac{1}{M} \nabla \cdot V - \frac{\rho_1}{2} (|A|_t^2 - \rho_3 |A|_x^2) + (2\mathcal{W}\mathcal{C} - \frac{\rho_1 \rho_3}{2}) |A|_x^2 = 0, \\ \partial_t V - \frac{1}{M} \nabla W - \left(\frac{2\mathcal{W}(\mathcal{C}^2 + M^2) - \rho_1}{2M} |A|_x^2, \frac{2\mathcal{W}M^2 - \rho_1}{2M} \nabla_\perp |A|^2 \right)^T = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

For shorter notation we set

$$c_1 = 2\mathcal{W}\mathcal{C} - \frac{\rho_1 \rho_3}{2}, \quad c_2 = \frac{2\mathcal{W}(\mathcal{C}^2 + M^2) - \rho_1}{2M}, \quad c_3 = \frac{2\mathcal{W}M^2 - \rho_1}{2M}.$$

Let furthermore $A = F + iG$ and $(\partial_x A, \nabla_\perp A)^T = H + iL = (H_1, H_\perp)^T + i(L_1, L_\perp)^T$. Multiplying the first equation of (3.31) by \bar{A} and taking the real part, we deduce that

$$\begin{aligned} |A|_t^2 - \rho_3 |A|_x^2 &= i\delta \partial_{xx} A \bar{A} - i\delta \partial_{xx} \bar{A} A + i\rho_1 \Delta_\perp A \bar{A} - i\rho_1 \Delta_\perp \bar{A} A \\ &= 2\delta (G \partial_x H_1 - F \partial_x L_1) + 2\rho_1 (G \nabla_\perp \cdot H_\perp - F \nabla_\perp \cdot L_\perp). \end{aligned}$$

We insert this expression in (3.31), and then separate real and imaginary part of the first equation of the system. We furthermore apply a gradient to the first equation of (3.31) to get the equations satisfied by H and L . This leads to the following system

$$\begin{cases} H_t - \rho_3 H_x + \delta \partial_{xx} L + \rho_1 \Delta_\perp L - G \nabla W \\ \quad - [WL + (\rho_2 - \frac{\rho_1}{2})(F^2 + G^2)L + 2G(HF + GL)] = 0, \\ L_t - \rho_3 L_x - \delta \partial_{xx} H - \rho_1 \Delta_\perp H + F \nabla W \\ \quad + [WH + (\rho_2 - \frac{\rho_1}{2})(F^2 + G^2)H + 2F(HF + GL)] = 0, \\ F_t - \rho_3 F_x + \delta \partial_{xx} G + \rho_1 \Delta_\perp G - [(\rho_2 - \frac{\rho_1}{2})(F^2 + G^2) + W]G = 0, \\ G_t - \rho_3 G_x - \delta \partial_{xx} F - \rho_1 \Delta_\perp F + [(\rho_2 - \frac{\rho_1}{2})(F^2 + G^2) + W]F = 0, \\ W_t - \frac{1}{M} \nabla \cdot V - \rho_1 \delta (G \partial_x H_1 - F \partial_x L_1) - (G \nabla_\perp \cdot H_\perp - F \nabla_\perp \cdot L_\perp) + 2c_1 (H_1 F + L_1 G) = 0, \\ \partial_t V - \frac{1}{M} \nabla W - 2(c_2 (H_1 F + L_1 G), c_3 H_\perp F + L_\perp G)^T = 0. \end{cases}$$

We set $\mathbf{U} = (H, L, F, G, W, V)^T \in \mathbb{R}^{3d+3}$. The above system can be written under the form

$$\mathbf{U}_t + \sum_{j=1}^d (A_j(\mathbf{U}) - \frac{1}{M} B_j) \mathbf{U}_{x_j} + C(\mathbf{U}) \mathbf{U} = -K_1 \partial_{xx} \mathbf{U} - K_2 \Delta_\perp \mathbf{U}, \quad (3.32)$$

where $A_2(\mathbf{U}), \dots, A_d(\mathbf{U})$ and B_1, \dots, B_d are symmetric $3d+3 \times 3d+3$ matrices, and K_1, K_2 skew symmetric matrices. The non-symmetric matrix $A_1(\mathbf{U})$ is given by

$$A_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0_{2d \times 2d} & 0_{2d \times 2} & \mathcal{M}_1(\mathbf{U}) & 0_{2d \times d} \\ 0_{2 \times 2d} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times d} \\ \mathcal{M}_2(\mathbf{U}) & 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times d} \\ 0_{d \times 2d} & 0_{d \times 2} & 0_{d \times 1} & 0_{d \times d} \end{pmatrix},$$

with

$$\mathcal{M}_1(\mathbf{U}) = (-G, \vec{0}, F, \vec{0})^T, \quad \mathcal{M}_2(\mathbf{U}) = (-\rho_1 \delta G, \vec{0}, \rho_1 \delta F, \vec{0}),$$

where we recall that $\vec{0} = 0$ for $d = 2$ et $\vec{0} = (0, 0)$ for $d = 3$.

One then verifies that $A_1(\mathbf{U})$ has only real eigenvalues if and only if $\rho_1 \delta \geq 0$. In this case, the system (3.32) is hyperbolic and we can introduce the variables $\tilde{H} = (\sqrt{\delta \rho_1} H_1, H_\perp)$ and $\tilde{L} = (\sqrt{\delta \rho_1} L_1, L_\perp)$ to get a symmetric system which is given by

$$\tilde{\mathbf{U}}_t + \sum_{j=1}^d (\tilde{A}_j(\tilde{\mathbf{U}}) - \frac{1}{M} B_j) \tilde{\mathbf{U}}_{x_j} + \tilde{C}(\tilde{\mathbf{U}}) \tilde{\mathbf{U}} = -K_1 \partial_{xx} \tilde{\mathbf{U}} - K_2 \Delta_\perp \tilde{\mathbf{U}}, \quad (3.33)$$

with

$$A_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0_{2d \times 2d} & 0_{2d \times 2} & \sqrt{\delta \rho_1} \mathcal{M}(\mathbf{U}) & 0_{2d \times d} \\ 0_{2 \times 2d} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times d} \\ \sqrt{\delta \rho_1} \mathcal{M}(\mathbf{U})^T & 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times d} \\ 0_{d \times 2d} & 0_{d \times 2} & 0_{d \times 1} & 0_{d \times d} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(\mathbf{U}) = (-G, \vec{0}, F, \vec{0})^T.$$

By the same arguments as in the 1D case, we can then prove the following existence theorem for solutions of (3.33).

Theorem 3.3.1. *Let $\delta \rho_1 > 0$, $s > d/2 + 1$ and $\mathbf{U}_0 \in (H^s(\mathbb{R}^d))^{3d+3}$. Then there exists $\mathcal{T} = \mathcal{T}(|\mathbf{U}_0|_{H^s}) > 0$ such that the system (3.33) has a unique solution*

$$\tilde{\mathbf{U}} \in C([0, \mathcal{T}); (H^s(\mathbb{R}^d))^{3d+3}) \cap C^1([0, \mathcal{T}); (H^{s-2}(\mathbb{R}^d))^{3d+3})$$

with initial condition $\tilde{\mathbf{U}}(0, X) = \mathbf{U}_0(X)$.

3.4 The two-dimensional full dispersion Benney-Roskes system

We now turn to the study of the FDBR system

$$\begin{cases} \partial_T A + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i \epsilon [|\mathbf{k}| \partial_X B + \gamma_1 P + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T P - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} B = -2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2, \\ \partial_T B + P = -2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2, \end{cases} \quad (3.34)$$

in two space dimensions $\mathbf{X} = (X, Y)$. As in the 1D case, we will consider the approximation

$$|D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} \approx -\sqrt{\mu} \Delta.$$

As before, we set $U = \gamma_1 P + |\mathbf{k}| B_X$, $\sqrt{\mu} = c^2$ and we decouple the equations for P and B by applying a T-derivative to both equations. Then U satisfies the wave equation

$$\partial_{TT}U - c^2 \Delta U - 2\frac{\omega}{\vartheta}(\gamma_1^2 c^2 \Delta |A|^2 + |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2 - 2\gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_{XT} |A|^2) = 0.$$

Introducing the auxiliary variable

$$\partial_T V = c \nabla U + 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2 c \nabla |A|^2 + \left(2\frac{\omega}{\vartheta c} |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2, 0\right)^T,$$

the wave equation for U is equivalent to

$$\begin{cases} \partial_T U - c \nabla \cdot V + \frac{4\omega \gamma_1 |\mathbf{k}|}{\vartheta} |A|_X^2 = 0, \\ \partial_T V - c \nabla U - 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2 c \nabla |A|^2 - \left(2\frac{\omega}{\vartheta c} |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2, 0\right)^T = 0. \end{cases}$$

The two dimensional FDBR system (3.34) in terms of A , U and V is then given by

$$\begin{cases} A_T + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A + i\epsilon [U + \gamma_2 |A|^2] A = 0, \\ \partial_T U - c \nabla \cdot V + \frac{4\omega \gamma_1 |\mathbf{k}|}{\vartheta} |A|_X^2 = 0, \\ \partial_T V - c \nabla U - 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2 c \nabla |A|^2 - \left(2\frac{\omega}{\vartheta c} |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2, 0\right)^T = 0. \end{cases}$$

Multiplying the first equation by \bar{A} , taking the real part and Taylor expanding the nonlocal operator leads to

$$\begin{aligned} 0 &= |A|_T^2 + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} A \bar{A} - i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} \bar{A} A \\ &= |A|_T^2 + \omega' |A|_X^2 - i \frac{\epsilon}{2} (\omega'' A_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} A_{YY}) \bar{A} + i \frac{\epsilon}{2} (\omega'' \bar{A}_{XX} + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} \bar{A}_{YY}) A + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

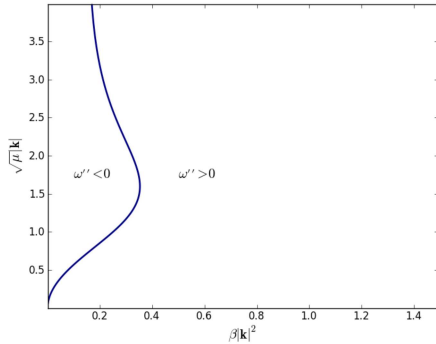


Figure 3.1: Sign of ω'' as function of $\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|$ and $\beta|\mathbf{k}|^2$. The line corresponds to the zero level set of ω'' .

We set $U = W - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega'}|A|^2$ and as before $A = F + iG$ and $(\partial_X A, \partial_Y A)^T = H + iL = (H_1, H_2)^T + i(L_1, L_2)^T$. An analogous calculation as in the preceding section then leads to the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T H + i\mathcal{P}_2(D)H - \mathcal{P}_1(D)L + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}L - \epsilon \nabla W G \\ \quad - \epsilon [WL + (\gamma_2 - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega'}) (2(FH + GL)G + (F^2 + G^2)L)] = 0, \\ \partial_T L + i\mathcal{P}_2(D)L + \mathcal{P}_1(D)H - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}H + \epsilon \nabla W F \\ \quad + \epsilon [WH + (\gamma_2 - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega'}) (2(FH + GL)F + (F^2 + G^2)H)] = 0, \\ \partial_T F + i\mathcal{P}_2(D)F - \mathcal{P}_1(D)G + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}G - \epsilon [W + (\gamma_2 - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega'}) (F^2 + G^2)]G = 0, \\ \partial_T G + i\mathcal{P}_2(D)G + \mathcal{P}_1(D)F - \frac{\omega(\mathbf{k})}{\epsilon}F + \epsilon [W + (\gamma_2 - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega'}) (F^2 + G^2)]F = 0, \\ W_T - c \nabla \cdot V - \frac{\epsilon \omega'' |\mathbf{k}|}{\omega'} (G \partial_X H_1 - F \partial_X L_1) - \epsilon (G \partial_Y H_2 - F \partial_Y L_2) \\ \quad + 2(\frac{4\omega |\mathbf{k}| \gamma_1}{\vartheta} + |\mathbf{k}|)(H_1 F + L_1 G) = 0, \\ V_T - c \nabla W + 2(\frac{c |\mathbf{k}|}{\omega'} - \frac{2\omega \gamma_1^2 c}{\vartheta})(H_1 F + L_1 G, H_2 F + L_2 G)^T - \frac{4\omega |\mathbf{k}|^2}{\vartheta c} (H_1 F + L_1 G, 0)^T = 0. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

By the same arguments as for the Zakharov-Rubenchik system (3.32), we can prove that the above system is locally well-posed if $\frac{\omega''}{\omega'} > 0$. The figures 3.2 - 3.7 show the graphs of $\omega'(\mathbf{k})$ and $\omega''(\mathbf{k})$ for different values of the surface tension coefficient β . We see that ω' and ω'' have different signs for all values of $|\mathbf{k}|$ in the zero surface tension case $\beta = 0$, so local well-posedness cannot be proved by the above method. For weak surface tension (figures 3.4 and 3.5), ω' and ω'' are both positive if $|\mathbf{k}|$ is sufficiently large, and their signs are different otherwise. If surface tension is sufficiently strong, ω' and ω'' are both positive for all values of $|\mathbf{k}|$. We also refer to figure 3.1 where the sign of ω'' is plotted as function of $\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|$ and $\beta|\mathbf{k}|^2$.

As in the 1D case, the last two equations of (3.35) contain "problematic" quadratic $O(1)$ -terms, multiples of $H_1 F + L_1 G$ and $H_2 F + L_2 G$, which prevent the direct demonstration of well-posedness on the long time scale. So we get the following local existence theorem for the 2D FDBR system.

Theorem 3.4.1. *Let $\frac{\omega''}{\omega'} > 0$, $s > 2$, $\mathbf{U} = (H, L, F, G, W, V)^T$ and $\mathbf{U}_0 \in (H^s(\mathbb{R}^2))^9$. Then there exists $\mathcal{T} = \mathcal{T}(|\mathbf{U}_0|_{H^s}) > 0$ such that the system (3.35) has a unique solution*

$$\mathbf{U} \in C([0, \mathcal{T}); (H^s(\mathbb{R}^2))^9) \cap C^1([0, \mathcal{T}); (H^{s-1}(\mathbb{R}^2))^9), \quad \text{if } \beta = 0,$$

or

$$\mathbf{U} \in C([0, \mathcal{T}); (H^s(\mathbb{R}^2))^9) \cap C^1([0, \mathcal{T}); (H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2))^9), \quad \text{if } \beta > 0$$

with initial condition $\mathbf{U}(0, X) = \mathbf{U}_0(X)$.

3.4.1 Modified two dimensional FDBR

As in the 1D case, we can try to modify the system for P and B by some $O(\epsilon)$ -terms without changing consistency, which might improve the local well-posedness result.

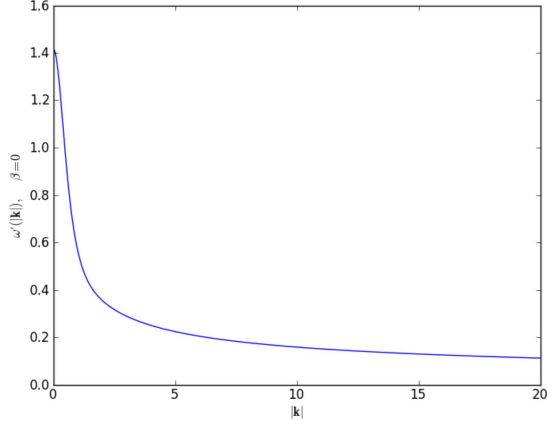


Figure 3.2: Graph of ω' for $\beta = 0$, $\sqrt{\mu} = 2$.

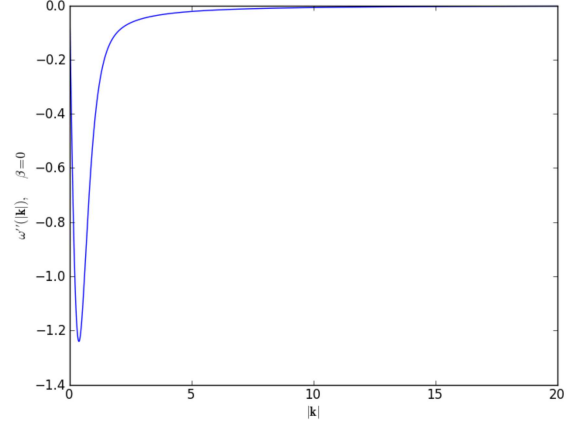


Figure 3.3: Graph of ω'' for $\beta = 0$, $\sqrt{\mu} = 2$.

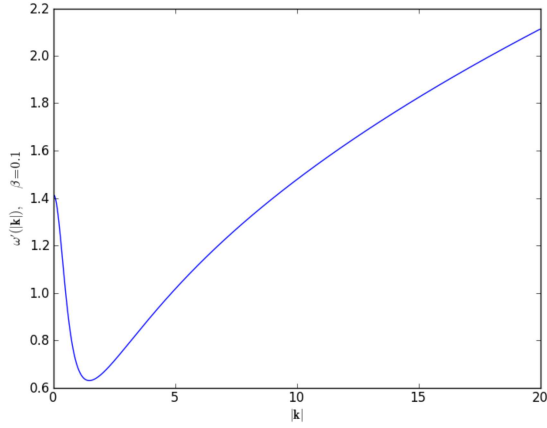


Figure 3.4: Graph of ω' for $\beta = 0.1$, $\sqrt{\mu} = 2$.

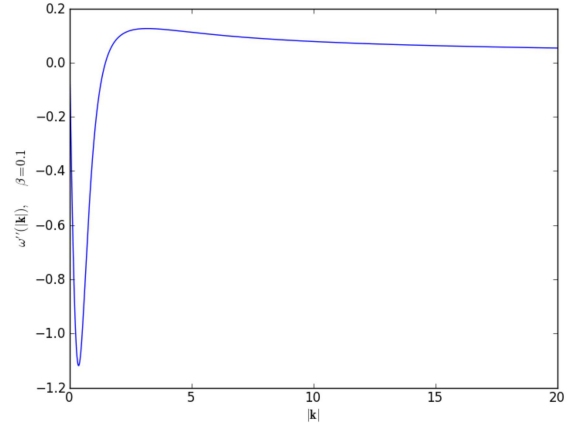


Figure 3.5: Graph of ω'' for $\beta = 0.1$, $\sqrt{\mu} = 2$.

So we consider

$$\begin{cases} \partial_T P + \sqrt{\mu} \Delta B + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_X |A|^2 + \epsilon L_1 = 0, \\ \partial_T B + P + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2 + \epsilon L_2 = 0. \end{cases}$$

As usual, we introduce $U = \gamma_1 P + |\mathbf{k}| B_X$ and decouple the equations for P and B . This leads to the following wave equation for U

$$\begin{aligned} \partial_{TT} U - c^2 \Delta U - 2 \frac{\omega}{\vartheta} (\gamma_1^2 c^2 \Delta |A|^2 + |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2 - 2 \gamma_1 |\mathbf{k}| \partial_{XT} |A|^2) \\ - \epsilon (\gamma_1 c^2 \Delta L_2 - \gamma_1 \partial_T L_1 + |\mathbf{k}| \partial_X L_1 - |\mathbf{k}| \partial_{TX} L_2) = 0. \end{aligned}$$

Coming back to a first order system, the wave equation for U is equivalent to

$$\begin{cases} \partial_T U - c \nabla \cdot V + \frac{4 \omega \gamma_1 |\mathbf{k}|}{\vartheta} |A|_X^2 + \epsilon \gamma_1 L_1 + \epsilon |\mathbf{k}| \partial_X L_2 = 0, \\ \partial_T V - c \nabla U - 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2 c \nabla |A|^2 - \left(2 \frac{\omega}{\vartheta c} |\mathbf{k}|^2 |A|_{XX}^2, 0 \right)^T - \epsilon \gamma_1 c \nabla L_2 - \epsilon \frac{|\mathbf{k}|}{c} (L_1, 0)^T = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

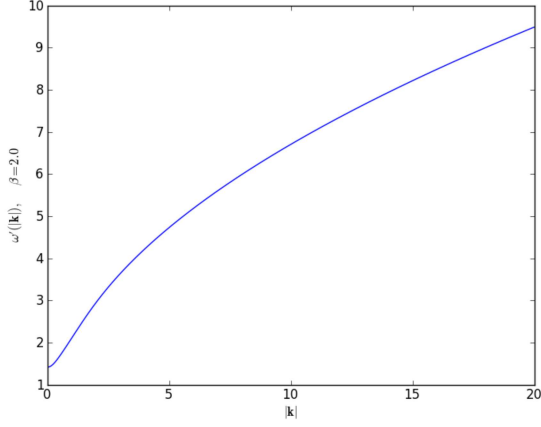


Figure 3.6: Graph of ω' for $\beta = 2.0$, $\sqrt{\mu} = 2$.

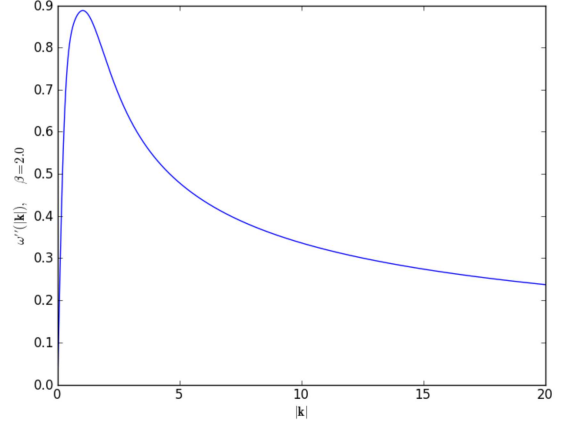


Figure 3.7: Graph of ω'' for $\beta = 2.0$, $\sqrt{\mu} = 2$.

Following the discussion of the preceding section, we would like to cancel the problematic $O(1)$ -terms in order to obtain well-posedness on the long time scale. However, this does not seem to work in the 2D case and let's quickly see why. The problematic terms are $|A|_X^2$ and $|A|_Y^2$. To treat the $|A|_Y^2$ terms we do not dispose of an equation like the one for $|A|_T + \omega'|A|_X$ which allows to replace this expression by some $O(\epsilon)$ terms. So the only way we see to get rid of the $\nabla|A|^2$ term in the second equation of (3.36) is to incorporate it in U by changing variables as $\tilde{U} = U + 2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2|A|^2$.

Then

$$\begin{cases} \partial_T \tilde{U} - c \nabla \cdot V - 2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2|A|_T^2 + \frac{4\omega\gamma_1|\mathbf{k}|}{\vartheta}|A|_X^2 + \epsilon\gamma_1 L_1 + \epsilon|\mathbf{k}|\partial_X L_2 = 0, \\ \partial_T V - c \nabla \tilde{U} - \left(2\frac{\omega}{\vartheta c}|\mathbf{k}|^2|A|_X^2, 0\right)^T - \epsilon\gamma_1 c \nabla L_2 - \epsilon\frac{|\mathbf{k}|}{c}(L_1, 0)^T = 0. \end{cases}$$

Denote $V = (V_1, V_2)$. To get rid of the $|A|_X^2$ in the second equation we change variables by $V_1 = \tilde{V}_1 + \alpha_1|A|^2$, where we choose α_1 such that $-2\frac{\omega}{\vartheta c}|\mathbf{k}|^2 = \alpha_1\omega'$. Therefore

$$\begin{cases} \partial_T \tilde{U} - c \nabla \cdot \tilde{V} - 2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2|A|_T^2 + \left(\frac{4\omega\gamma_1|\mathbf{k}|}{\vartheta} - c\alpha_1\right)|A|_X^2 + \epsilon\gamma_1 L_1 + \epsilon|\mathbf{k}|\partial_X L_2 = 0, \\ \partial_T \tilde{V} - c \nabla \tilde{U} + (\alpha_1(|A|_T^2 + \omega'|A|_X^2), 0)^T - \epsilon\gamma_1 c \nabla L_2 - \epsilon\frac{|\mathbf{k}|}{c}(L_1, 0)^T = 0, \end{cases}$$

such that the second equation only contains $O(\epsilon)$ -terms. The first equation of the above system only contains $O(\epsilon)$ - terms if the coefficients satisfy

$$\frac{4\omega\gamma_1|\mathbf{k}|}{\vartheta} - c\alpha_1 = -2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2\omega'.$$

Simplifying this equation we get that it is equivalent to

$$(\gamma_1\omega' + |\mathbf{k}|)^2 = 0$$

which is only true for $|\mathbf{k}| = 0$. So the question of well-posedness for the two dimensional (FD)BR system on the $O(\epsilon^{-1})$ time scale remains open for the moment.

3.5 Summary of the well-posedness results

The well-posedness results of this chapter concerning the Cauchy problem for the systems (3.18), (3.29) and (3.35) are summarized in the table 3.1. We recall that these systems differ from the initial FDBR equations (3.1) only by some $O(\epsilon^2)$ -terms which do not change the order of consistency of the FDBR approximation.

Here, $T_0 > 0$ is a constant depending on the initial conditions of A , P and B . d is the dimension of the space variables.

| | $\frac{\omega''}{\omega'} > 0$ | $\frac{\omega''}{\omega'} < 0$ |
|----------------------------------|---|---|
| $d = 1$ (Theorem 3.2.1) | Local existence $T = O(1)$ $(A, P, B_X) \in$ $C([0, T_0]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ $s > 3/2$ | Local existence $T = O(1)$ $(A, P, B_X) \in$ $C([0, T_0]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ $s > 3/2$ |
| $d = 1$ modified (section 3.2.3) | Long time $T = O(\epsilon^{-1})$ $(A, P, B_X) \in$ $C([0, T_0/\epsilon]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ $s > 3/2$ | Long time $T = O(\epsilon^{-1})$ $(A, P, B_X) \in$ $C([0, T_0/\epsilon]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ $s > 3/2$ |
| $d = 2$ (Theorem 3.4.1) | Local existence $T = O(1)$ $(A, P, B_X) \in$ $C([0, T_0]; H^{s+1} \times H^s \times H^s)$ $s > 2$ | Open problem |

Table 3.1: Summary of the well-posedness results for the FDBR system

We also recall that $\omega' > 0$ for all values of $|\mathbf{k}|$. The sign of ω'' is variable, and the case $\omega''/\omega' > 0$, where local well-posedness of the FDBR system has been demonstrated, can only occur if the surface tension coefficient β is sufficiently large. The sign of ω'' as function of $\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|$ and $\beta|\mathbf{k}|^2$ is plotted in figure 3.1.

3.6 Remarks on traveling waves

In this section, we are interested in special solutions of the FDBR system (3.1) under the form of traveling waves. We focus on the one dimensional case $\mathbf{X} = X$. We are looking for solutions under the form

$$A(T, X) = \psi(X - \nu T)e^{i\lambda T}, \quad P(T, X) = p(X - \nu T), \quad B(T, X) = b(X - \nu T),$$

with $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$, ψ a complex-valued function, and p, b real valued functions. In the following, we do not prove the existence of traveling waves for the FDBR system, but we discuss in an informal manner how this problem might be approached.

Inserting the traveling waves ansatz in (3.1), we obtain

$$\begin{cases} i\lambda\psi - \nu \frac{d\psi}{dX} + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} \psi + i\epsilon[|\mathbf{k}| \frac{db}{dX} + \gamma_1 p + \gamma_2 |\psi|^2] \psi = 0, \\ -\nu \frac{dp}{dX} - |D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} b = -2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \frac{d|\psi|^2}{dX}, \\ -\nu \frac{db}{dX} + p = -2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\psi|^2, \end{cases} \quad (3.37)$$

where γ_1, γ_2 are defined as in (3.7). The third equation of (3.37) directly yields an expression for p in terms of b and ψ . Inserting this in the first and second equations, we get the following coupled system for ψ and b .

$$\begin{cases} i\lambda\psi - \nu \frac{d\psi}{dX} + i \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon} \psi + i\epsilon[|\mathbf{k}| + \gamma_1 \nu] \frac{db}{dX} + (\gamma_2 - 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2) |\psi|^2 \psi = 0, \\ -\nu^2 \frac{d^2 b}{dX^2} - |D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} b = -2\frac{\omega}{\vartheta} (|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1) \frac{d|\psi|^2}{dX}. \end{cases} \quad (3.38)$$

In Fourier variables, the equation for b reduces to

$$\left(-\nu^2 + \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|)}{\epsilon|\xi|} \right) \widehat{\frac{db}{dX}} = -2\frac{\omega}{\vartheta} (|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1) \widehat{|\psi|^2}, \quad (3.39)$$

which we can solve for b by inverting the symbol in the left hand side of (3.39). This is possible for arbitrary ψ if the condition

$$-\nu^2 + \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|)}{\epsilon|\xi|} \neq 0 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}$$

is satisfied. However, if (and only if) $\sqrt{\mu} \geq \nu^2$, there is a pair of frequencies $\xi = \pm|\xi_\epsilon|$ which cancel the symbol. This follows easily from the behavior of the function $f(x) = \frac{\tanh(\sqrt{\mu}x)}{x}$, which satisfies $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{\mu}$ and decays to zero for $x \rightarrow \infty$.

In the case $\sqrt{\mu} < \nu^2$, we can invert the equation for b , which gives

$$\frac{db}{dX} = 2 \frac{\omega(|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1) \epsilon |D|}{\vartheta(\nu^2 \epsilon |D| - \tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|))} |\psi|^2.$$

Furthermore, as the inverse symbol is bounded, the solution for db/dX has the same regularity as $|\psi|^2$, in particular we have

$$\left| \frac{db}{dX} \right|_{L^2} \leq C \| |\psi|^2 \|_{L^2}.$$

As we cannot invert the symbol for $\sqrt{\mu} \geq \nu^2$, we replace it by the approximation

$$-\nu^2 + \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|)}{\epsilon|\xi|} = -\nu^2 + \sqrt{\mu} + O(\epsilon^2)$$

and neglect the small terms (again, this does not change the order of consistency of the FDBR system). Then, for $\sqrt{\mu} > \nu^2$, we can solve the approximate equation for b , and we obtain

$$\frac{db}{dX} = 2 \frac{\omega(|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1)}{\vartheta(\nu^2 - \sqrt{\mu})} |\psi|^2.$$

Inserting the solution for b in the first equation of (3.38), we get a scalar equation for ψ , which is given by

$$\lambda\psi + i\nu\frac{d\psi}{dX} + \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}\psi + \epsilon[M(D)|\psi|^2]\psi = 0, \quad (3.40)$$

where

$$M(D) = 2\frac{\omega(|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1)^2\epsilon|D|}{\vartheta(\nu^2\epsilon|D| - \tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|\xi|))} + (\gamma_2 - 2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2), \quad \text{if } \sqrt{\mu} < \nu^2 \quad (3.41)$$

or

$$M(D) = M = 2\frac{\omega(|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1)^2}{\vartheta(\nu^2 - \sqrt{\mu})} + (\gamma_2 - 2\frac{\omega}{\vartheta}\gamma_1^2) \quad \text{if } \sqrt{\mu} > \nu^2. \quad (3.42)$$

In both cases, $M(D)$ is a bounded operator on L^2 . We furthermore define the notation

$$\mathcal{P}(D) = \frac{\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k})}{\epsilon}.$$

The equation (3.40) admits a variational formulation: Critical points of the (real valued) functional $\mathcal{E} : H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{\lambda}{2} \int |\psi|^2 dX + i\frac{\nu}{2} \int \frac{d\psi}{dX} \bar{\psi} dX + \frac{1}{2} \int \mathcal{P}(D)\psi\bar{\psi} dX + \frac{\epsilon}{4} \int [M(D)|\psi|^2]|\psi|^2 dX$$

are weak solutions of (3.40), where we interpret $\mathcal{E}(\psi) = \mathcal{E}(\psi_1, \psi_2)$ as a function of the real and imaginary part of $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. However, the functional \mathcal{E} is not coercive on $H^1(\mathbb{R})$, so that the usual constrained minimization techniques can not be applied.

On the other hand, if we substitute $\mathcal{P}(D)$ in (3.40) by its second order Taylor expansion, we get the following differential equation for ψ

$$\lambda\psi + i(\nu - \omega')\psi' - \frac{\epsilon}{2}\omega''\psi'' + \epsilon[M(D)|\psi|^2]\psi = 0.$$

Now choose $\nu = \omega' + \epsilon v$, $\lambda = \epsilon a$ and $\psi(X) = e^{i\frac{v}{\omega''}X}R(X)$, where R is a real valued function. Then R satisfies the ordinary differential equation

$$(a - \frac{v^2}{2\omega''})R - \frac{\omega''}{2}R'' + M(D)|R|^2R = 0. \quad (3.43)$$

This is the well known stationary cubic nonlinear Schrödinger equation (see for instance chapter 4 of [SS99]). Assuming $M(D) = M$ constant for simplicity, iff $v^2 - 2\omega''a < 0$ and $M/\omega'' < 0$ (we will discuss in a moment if these inequalities can be satisfied in the context of the FDBR system), then (3.43) has a unique positive solution decaying to zero for $|X| \rightarrow \infty$, which is given by

$$R(X) = \frac{\sqrt{\frac{2\lambda_1}{M}}}{\cosh(\sqrt{\frac{\lambda_1}{3\lambda_2}}X)}, \quad \lambda_1 = a - \frac{v^2}{2\omega''}, \quad \lambda_2 = -\frac{\omega''}{2}.$$

A variational formulation of (3.43) is to minimize the functional

$$\mathcal{E}_{app}(R) = \int |R'|^2 dX + \frac{1}{2\omega''} \int [M(D)|R|^2]|R|^2 dX \quad (3.44)$$

for some fixed value of $\int |R|^2 dX$. This functional is coercive on $H^1(\mathbb{R})$.

A somehow similiar problem was treated by Ehrnström, Groves and Wahlén [EGW12] for a class of Whitham equations under the form

$$u_t + (Lu + n(u))_x = 0, \quad (3.45)$$

where $u = u(t, x)$ is a real valued function, L a linear smoothing operator, and n a nonlinear function. The operator L is a Fourier multiplier with smooth symbol $m(\xi)$, where m is even, has a strict and positive global maximum at $\xi = 0$, and has the property that

$$|m^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m_0 - \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0$$

for some $m_0 < 0$. An example for this is the Whitham equation

$$u_t + 2uu_x + \left(\frac{\tanh(D)}{D} \right)^{1/2} u_x = 0,$$

which was proposed by Whitham [Whi67] in the context of the water waves problem for gravity waves as a "full dispersion" alternative to the Korteweg-deVries equation.

In their paper [EGW12], Ehrnström, Groves and Wahlén show by variational methods that (3.45) admits solitary traveling wave solutions under the form $u(x - \nu t)$. These have to satisfy the equation

$$Lu - \nu u + n(u) = 0. \quad (3.46)$$

To construct solutions of (3.46), Ehrnström, Groves and Wahlén derive a long wave-approximation to (3.46) by searching small amplitude solutions under the form

$$u(x) = \mu^\alpha w(\mu^\beta x),$$

for a small parameter $\mu \ll 1$, and where α and β are chosen such that $\frac{1}{2} \int u^2 = \mu$. Approximating L by its second order² Taylor expansion then yields the following ordinary differential equation for w

$$\mu^{p\alpha} (m_2 w'' - \nu_{lw} u + n_p(w)) = o(\mu^{p\alpha})$$

where p is the leading order of the nonlinearity, $m_2 > 0$ and $\mu^\gamma \nu_{lw} = \nu - m(0)$.

This is a quite similar situation to the search for solitary waves for the FDBR system, in the sens that an equation containing nonlocal Fourier multiplier operators is approximated by an ordinary differential equation admitting a variational formulation, and a small parameter is involved. However, the symbol $\mathcal{P}(D)$ in (3.40) does not satisfy the assumptions on the symbol L , such that the calculations of Ehrnström, Groves and Wahlén need to be modified. It is an interesting question (which is currently a work in progress) to see if the method of Ehrnström, Groves and Wahlén can be used to show existence of solutions to (3.40).

One could furthermore consider the paper [EK13], where existence of periodic traveling waves is shown for the Whitham equation.

To conclude this section, we now comment on the signs of ω'' and $M(D)$, where we recall that $M(D)$ is defined by (3.41) - (3.42). As we want to take $M(D)$ constant in order to simplify the discussion, we approximate $M(D)$ by its Taylor expansion also in the case $\sqrt{\mu} < \nu^2$. Then (3.41) - (3.42) reduce to

$$M(D) = M = 2 \frac{\omega(|\mathbf{k}| + \nu\gamma_1)^2}{\vartheta(\nu^2 - \sqrt{\mu})} + (\gamma_2 - 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2) \quad \text{if } \sqrt{\mu} \neq \nu^2.$$

²In fact, they consider the more general case that $m(\xi) - m(0) = O(\xi^{2j_*})$ for $1 \leq j_* \in \mathbb{N}$.

Furthermore, as discussed previously, we want to choose $\nu = \omega' + \epsilon v$. So if ϵ is sufficiently small, the sign of M is equal to the sign of

$$M_0 = 2 \frac{\omega(|\mathbf{k}| + \omega' \gamma_1)^2}{\vartheta((\omega')^2 - \sqrt{\mu})} + (\gamma_2 - 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2).$$

We recall that

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta}{2\omega} |\mathbf{k}|^2 (1 - \sigma^2),$$

$$\gamma_2 = -\frac{|\mathbf{k}|^4}{2\omega} \left[\frac{-4(1 + 4\tilde{\beta})(1 - \sigma^2)^2}{(1 + \sigma^2)(2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3))} + \frac{(1 + \tilde{\beta})(1 + \sigma^2)(3\sigma^2 - 5)}{2\sigma^2 + 2\tilde{\beta}(\sigma^2 - 3)} - \frac{2(3\sigma^4 - \sigma^2)}{1 + \sigma^2} + \frac{3\sigma^2 \tilde{\beta}}{2(1 + \tilde{\beta})} \right]$$

with $\tilde{\beta} = \beta |\mathbf{k}|^2$.

We first consider the zero surface tension case $\beta = 0$. Then $(\omega')^2 < \sqrt{\mu}$, $\vartheta = 1$, $\omega'' < 0$ and γ_2 reduces to

$$\gamma_2 = \frac{|\mathbf{k}|^4}{2\omega} \frac{9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9}{2\sigma^2}.$$

The values of M_0 as function of $\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|$ are given in figure 3.8. We expect to have solitary wave solutions in the case $M_0/\omega'' < 0$. In the zero surface tension case, this is equivalent to $M_0 > 0$. This is possible for $|\mathbf{k}|$ large enough (more precisely $|\mathbf{k}|\sqrt{\mu} > k_0$, where k_0 does not depend on μ).

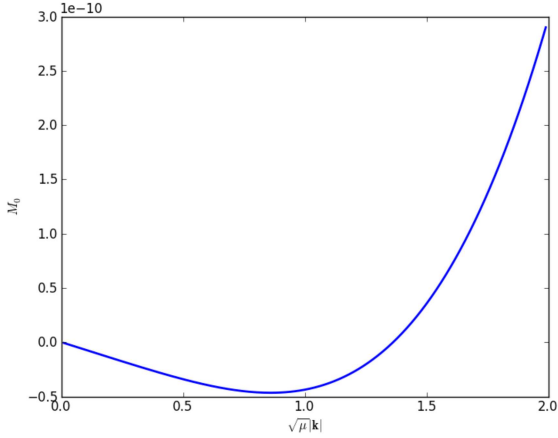


Figure 3.8: Graph of M_0 as function of $\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|$

For positive values of β , the analysis of M_0 is more complicated, and we refer to [AS79] (section 3.2 and figure 1) for a complete discussion of the possible cases. We just note that indeed there exist regions of parameters where $M_0/\omega'' < 0$ is satisfied, such that we expect the existence of solitary waves.

Chapter 4

The full dispersion Davey-Stewartson systems

Remark. This is only a partial version of the fourth chapter of the present PhD thesis. The full text is available at the library of Université Paris Sud. The results of this chapter are also published in [OS].

In this chapter, we introduce the full dispersion Davey-Stewartson systems, and we study their well-posedness in Sobolev space. This chapter is based on the paper [OS].

As we have seen previously, the (FD)BR model has the disadvantage that the proof of its well-posedness on the appropriate $O(\epsilon^{-1})$ time scale is not known for the moment. In order to get an asymptotic model in the modulational regime which has the same consistency properties as the (FD)BR system, but a more convenient well-posedness theory, one usually considers the Davey-Stewartson approximation. As already mentioned briefly in the introduction of this thesis, the Davey-Stewartson approximation is derived from the FDBR system (3.1) using the observation that

$$\partial_T A + \omega' \partial_X A = O(\epsilon),$$

which is obtained by expanding the first equation of (3.1).

This motivates the search of a solution A under the form

$$A(T, X, Y) = \tilde{A}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) = \tilde{A}(\tau, \tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Following the discussion in section 8.2.6 of [Lan13], the ansatz for P and B is given by

$$\begin{aligned} P(T, X, Y) &= \tilde{P}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) + P^*(T, X, Y), \\ B(T, X, Y) &= \tilde{B}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) + B^*(T, X, Y), \end{aligned}$$

where one singles out the components of P and B which are forced by \tilde{A} and travel at group speed. Inserting this ansatz in the system for P and B and separating the equations for the different components one gets

$$\begin{cases} \epsilon \partial_\tau \tilde{P} - \omega' \partial_{\tilde{X}} \tilde{P} - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} \tilde{B} + 2 \frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_{\tilde{X}} |\tilde{A}|^2 = 0, \\ \epsilon \partial_\tau \tilde{B} - \omega' \partial_{\tilde{X}} \tilde{B} + \tilde{P} + 2 \frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\tilde{A}|^2 = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

as well as a homogeneous wave-type equation for P^\star and B^\star

$$\begin{cases} \partial_T P^\star - |D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} B^\star = 0, \\ \partial_T B^\star + P^\star = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

As discussed in the beginning of section 3.2.3, adding or removing $O(\epsilon)$ terms from the equations for P and B does not change the order of consistency of the asymptotic model. We can therefore neglect the $O(\epsilon)$ terms in (4.1).

Furthermore, the initial conditions for (4.2) are given by

$$P^\star(0, X, Y) = P(0, X, Y) - \tilde{P}(0, X, Y), \quad B^\star(0, X, Y) = B(0, X, Y) - \tilde{B}(0, X, Y),$$

so if we take $P^\star(0, X, Y) = B^\star(0, X, Y) = 0$, then the solution of (4.2) will be zero for all times.

We can therefore define the Davey-Stewartson approximation by

$$\begin{aligned} A(T, X, Y) &= \tilde{A}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) = \tilde{A}(\tau, \tilde{X}, \tilde{Y}), \\ P(T, X, Y) &= \tilde{P}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) = \tilde{P}(\tau, \tilde{X}, \tilde{Y}), \\ B(T, X, Y) &= \tilde{B}(\epsilon T, X - \omega' T, Y) = \tilde{B}(\tau, \tilde{X}, \tilde{Y}), \end{aligned}$$

where the unknown functions satisfy the system

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{A} + \frac{i}{\epsilon^2} (\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k}) - \epsilon \omega' D_{\tilde{X}}) \tilde{A} + i[|\mathbf{k}| \partial_{\tilde{X}} \tilde{B} + \gamma_1 \tilde{P} + \gamma_2 |\tilde{A}|^2] \tilde{A} = 0, \\ -\omega' \partial_{\tilde{X}} \tilde{P} - |D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} \tilde{B} + 2\frac{\omega}{\vartheta} |\mathbf{k}| \partial_{\tilde{X}} |\tilde{A}|^2 = 0, \\ -\omega' \partial_{\tilde{X}} \tilde{B} + \tilde{P} + 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |\tilde{A}|^2 = 0 \end{cases}$$

We recall that γ_1 and γ_2 are defined in (3.7). Using the third equation of this system to substitute \tilde{P} in the first and second equation, we get a coupled system for \tilde{A} and \tilde{B} . In the following, we will omit the tildes to simplify notations. The system for A and B , which we call the full dispersion Davey-Stewartson (FDDS) system, is given by

$$\begin{cases} \partial_\tau A + \frac{i}{\epsilon^2} (\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k}) - \epsilon \omega' D_X) A + i[\lambda_1 \partial_X B + \lambda_2 |A|^2] A = 0, \\ (\omega')^2 \partial_{XX} B + |D| \frac{\tanh(\epsilon\sqrt{\mu}|D|)}{\epsilon} B - 2\frac{\omega}{\vartheta} \lambda_1 \partial_X |A|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

with $D_X = -i\partial_X$ and where we set

$$\lambda_1 = |\mathbf{k}| + \gamma_1 \omega', \quad \lambda_2 = \gamma_2 - 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1^2.$$

After solving the system for A and B , we can obtain P by

$$P = \omega' \partial_X B - 2\frac{\omega}{\vartheta} \gamma_1 |A|^2. \quad (4.4)$$

As mentioned in [Lan13], the main drawback of the Davey-Stewartson approximation is that we cannot consider arbitrary initial data, but the initial data has to be well prepared in the sens that it needs to satisfy equation (4.4) and the second equation of (4.3) at $\tau = 0$. On the other hand, it has the advantage that the unknowns depend on the slow time variable $\tau = \epsilon T = \epsilon^2 t$, so that

it is sufficient to show local well-posedness of the DS system in order to get consistency on the appropriate $O(\epsilon^{-2})$ time scale.

The classical Davey-Stewartson system is obtained from (4.3) by replacing the nonlocal Fourier multiplier operators by their second order Taylor expansions (we recall that the wave vector $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|e_X$ is chosen to point in X -direction and that $\omega(\mathbf{k}) = \omega(|\mathbf{k}|)$ is defined by (2.13))

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{k} + \epsilon D) - \omega(\mathbf{k}) - \epsilon \omega' D_X &\approx \frac{\epsilon^2}{2}(\omega'' D_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} D_Y^2) = -\frac{\epsilon^2}{2}(\omega'' \partial_X^2 + \frac{\omega'}{|\mathbf{k}|} \partial_Y^2), \\ |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} &\approx \sqrt{\mu} |D|^2 = -\sqrt{\mu} \Delta.\end{aligned}$$

We also recall that

$$\omega' = \frac{d\tilde{\omega}}{dr}|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \omega'' = \frac{d^2\tilde{\omega}}{dr^2}|_{r=|\mathbf{k}|}, \quad \text{with } \tilde{\omega}(r) = [r \tanh(\sqrt{\mu}r)(1 + \beta r^2)]^{1/2}.$$

For results on the Cauchy theory for the full dispersion Davey-Stewartson system we refer the reader to [OS].

Bibliography

- [ABN12] David Ambrose, Jerry Bona, and David Nicholls, *Well-posedness of a model for water waves with viscosity*.
- [ABZ⁺11] Thomas Alazard, Nicolas Burq, Claude Zuily, et al., *On the water-wave equations with surface tension*, Duke Mathematical Journal **158** (2011), no. 3, 413–499.
- [ABZ13] Thomas Alazard, Nicolas Burq, and Claude Zuily, *The water-wave equations: from Zakharov to Euler*, Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs, Springer, 2013, pp. 1–20.
- [ABZ14] ———, *On the Cauchy problem for gravity water waves*, Inventiones mathematicae **198** (2014), no. 1, 71–163.
- [AD13] Thomas Alazard and Jean-Marc Delort, *Global solutions and asymptotic behavior for two dimensional gravity water waves*, arXiv preprint arXiv:1305.4090 (2013).
- [AS79] Mark J Ablowitz and Harvey Segur, *On the evolution of packets of water waves*, Journal of Fluid Mechanics **92** (1979), no. 04, 691–715.
- [ASL08] Borys Alvarez-Samaniego and David Lannes, *Large time existence for 3d water-waves and asymptotics*, Inventiones mathematicae **171** (2008), no. 3, 485–541.
- [BCL05] Jerry L Bona, Thierry Colin, and David Lannes, *Long wave approximations for water waves*, Archive for rational mechanics and analysis **178** (2005), no. 3, 373–410.
- [BF67] T Brooke Benjamin and JE Feir, *The disintegration of wave trains on deep water part 1. Theory*, Journal of Fluid Mechanics **27** (1967), no. 03, 417–430.
- [BR69] DJ Benney and GJ Roskes, *Wave instabilities*, Stud. Appl. Math **48** (1969), no. 377, 377–385.
- [C⁺99] Hiroyuki Chihara et al., *The initial value problem for the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson equation*, Journal of Mathematics of Kyoto University **39** (1999), no. 1, 41–66.
- [CCG10] Antonio Córdoba, Diego Córdoba, and Francisco Gancedo, *Interface evolution: water waves in 2-D*, Advances in Mathematics **223** (2010), no. 1, 120–173.
- [CL00] Demetrios Christodoulou and Hans Lindblad, *On the motion of the free surface of a liquid*, Communications on Pure and Applied Mathematics **53** (2000), no. 12, 1536–1602.
- [CL04] Thierry Colin and David Lannes, *Justification of and long-wave correction to Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **11** (2004), 83–100.

- [CL09] Mathieu Colin and David Lannes, *Short pulses approximations in dispersive media*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **41** (2009), no. 2, 708–732.
- [CN00] Walter Craig and David P Nicholls, *Traveling two and three dimensional capillary gravity water waves*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **32** (2000), no. 2, 323–359.
- [Col02] Thierry Colin, *Rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation and Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems*, Asymptotic Analysis **31** (2002), no. 1, 69–91.
- [Cra85] Walter Craig, *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-deVries scaling limits*, Communications in Partial Differential Equations **10** (1985), no. 8, 787–1003.
- [Cra04] Alex DD Craik, *The origins of water wave theory*, Annu. Rev. Fluid Mech. **36** (2004), 1–28.
- [CS93] Walter Craig and Catherine Sulem, *Numerical simulation of gravity waves*, Journal of Computational Physics **108** (1993), no. 1, 73–83.
- [CS07] Daniel Coutand and Steve Shkoller, *Well-posedness of the free-surface incompressible Euler equations with or without surface tension*, Journal of the American Mathematical Society **20** (2007), no. 3, 829–930.
- [CSS92] Walter Craig, Catherine Sulem, and Pierre-Louis Sulem, *Nonlinear modulation of gravity waves: a rigorous approach*, Nonlinearity **5** (1992), no. 2, 497.
- [CSS97] Walter Craig, Ulrich Schanz, and Catherine Sulem, *The modulational regime of three-dimensional water waves and the Davey-Stewartson system*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, vol. 14, Elsevier, 1997, pp. 615–667.
- [Dar05] Olivier Darrigol, *Worlds of flow. a history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Springer, 2005.
- [DR77] V Dj Djordjevic and LG Redekopp, *On two-dimensional packets of capillary-gravity waves*, Journal of Fluid Mechanics **79** (1977), no. 04, 703–714.
- [DS74] A Davey and K Stewartson, *On three-dimensional packets of surface waves*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **338** (1974), no. 1613, 101–110.
- [EGW12] Mats Ehrnström, Mark D Groves, and Erik Wahlén, *On the existence and stability of solitary-wave solutions to a class of evolution equations of Whitham type*, Nonlinearity **25** (2012), no. 10, 2903.
- [EK13] Mats Ehrnström and Henrik Kalisch, *Global bifurcation for the Whitham equation*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena **8** (2013), no. 05, 13–30.
- [GMS09] Pierre Germain, Nader Masmoudi, and Jalal Shatah, *Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3*, Comptes Rendus Mathématique **347** (2009), no. 15, 897–902.

- [GMS12] ———, *Global existence for capillary water waves*, arXiv preprint arXiv:1210.1601 (2012).
- [GO14] Loukas Grafakos and Seungly Oh, *The Kato-Ponce inequality*, Communications in Partial Differential Equations **39** (2014), no. 6, 1128–1157.
- [GS90] J-M Ghidaglia and J-C Saut, *On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems*, Nonlinearity **3** (1990), no. 2, 475.
- [Hay97] Nakao Hayashi, *Local existence in time of solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system without smallness condition on the data*, Journal d'Analyse Mathématique **73** (1997), no. 1, 133–164.
- [HH96] Nakao Hayashi and Hitoshi Hirata, *Global existence and asymptotic behaviour in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system*, Nonlinearity **9** (1996), no. 6, 1387.
- [HO72] Hidenori Hasimoto and Hiroaki Ono, *Nonlinear modulation of gravity waves*, Journal of the Physical Society of Japan **33** (1972), no. 3, 805–811.
- [HS⁺95] Nakao Hayashi, Jean-Claude Saut, et al., *Global existence of small solutions to the Davey-Stewartson and the Ishimori systems*, Differential and Integral Equations **8** (1995), no. 7, 1657–1675.
- [Igu06] Tatsuo Iguchi, *A shallow water approximation for water waves*, Keio University. Department of Mathematics, 2006.
- [IP] AD Ionescu and F Pusateri, *Global solutions for the gravity water waves system in 2D, preprint, 2013*, arXiv preprint arXiv:1303.5357.
- [IP14] Alexandru D Ionescu and Fabio Pusateri, *Global analysis of a model for capillary water waves in 2D*, arXiv preprint arXiv:1406.6042 (2014).
- [Joh97] RS Johnson, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, vol. 19, Cambridge University Press, 1997.
- [KN⁺79] Tadayoshi Kano, Takaaki Nishida, et al., *Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde*, Journal of Mathematics of Kyoto University **19** (1979), no. 2, 335–370.
- [KP88] Tosio Kato and Gustavo Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics **41** (1988), no. 7, 891–907.
- [Lan05] David Lannes, *Well-posedness of the water-waves equations*, Journal of the American Mathematical Society **18** (2005), no. 3, 605–654.
- [Lan13] ———, *The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics*, Mathematical Surveys and Monographs **188** (2013).
- [Lin05] Hans Lindblad, *Well-posedness for the motion of an incompressible liquid with free surface boundary*, Annals of mathematics (2005), 109–194.

- [LM⁺09] Felipe Linares, Carlos Matheus, et al., *Well posedness for the 1d Zakharov-Rubenchik system*, Advances in Differential Equations **14** (2009), no. 3/4, 261–288.
- [LP93] Felipe Linares and Gustavo Ponce, *On the Davey-Stewartson systems*, Annales de l’institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire, vol. 10, Gauthier-Villars, 1993, pp. 523–548.
- [Maj84] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space dimensions*, Springer, Berlin, 1984.
- [Mit02] Hisashi Mitsuyasu, *A historical note on the study of ocean surface waves*, Journal of oceanography **58** (2002), no. 1, 109–120.
- [MZ09] Mei Ming and Zhifei Zhang, *Well-posedness of the water-wave problem with surface tension*, Journal de mathématiques pures et appliquées **92** (2009), no. 5, 429–455.
- [Nal74] VI Nalimov, *The Cauchy-Poisson problem*, Dynamika Splosh. Sredy **18** (1974), 104–210.
- [Obr14] Caroline Obrecht, *A full dispersion asymptotic model to the water wave equations with surface tension*, Asymptotic Analysis **90** (2014), no. 1, 133–160.
- [OS] C. Obrecht and J.-C. Saut, *Remarks on the full dispersion Davey-Stewartson systems*, to appear in Communications on Pure and Applied Analysis.
- [Ovs76] LV Ovsjannikov, *Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification*, Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics, Springer, 1976, pp. 426–437.
- [PS05] Gustavo Ponce and J Saut, *Well-posedness for the Benney-Roskes/Zakharov-Rubenchik system*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **13** (2005), no. 3, 811.
- [PSS96] T Passot, C Sulem, and PL Sulem, *Generation of acoustic fronts by focusing wave packets*, Physica D: Nonlinear Phenomena **94** (1996), no. 4, 168–187.
- [Rau12] Jeffrey Rauch, *Hyperbolic partial differential equations and geometric optics*, vol. 133, American Mathematical Soc., 2012.
- [RS76] John Reeder and Marvin Shinbrot, *Initial value-problem for surface-waves under gravity. 2. Simplest 3-dimensional case*, Indiana University Mathematics Journal **25** (1976), no. 11, 1049–1071.
- [Sch05] Ben Schweizer, *On the three-dimensional Euler equations with a free boundary subject to surface tension*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, vol. 22, Elsevier, 2005, pp. 753–781.
- [Ser03] Filipe Serra de Oliveira, *Stability of the solitons for the one-dimensional Zakharov-Rubenchik equation*, Physica D: Nonlinear Phenomena **175** (2003), no. 3, 220–240.
- [SH91] J Sander and K Hutter, *On the development of the theory of the solitary wave. A historical essay*, Acta Mechanica **86** (1991), no. 1-4, 111–152.
- [Shi76] Marvin Shinbrot, *Initial value-problem for surface-waves under gravity. 1. Simplest case*, Indiana University Mathematics Journal **25** (1976), no. 3, 281–300.

- [SS99] Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*, vol. 139, Springer, 1999.
- [SW86] Steven H Schochet and Michael I Weinstein, *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence*, Communications in mathematical physics **106** (1986), no. 4, 569–580.
- [SZ08] Jalal Shatah and Chongchun Zeng, *Geometry and a priori estimates for free boundary problems of the Euler’s equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics **61** (2008), no. 5, 698–744.
- [Tot13] Nathan Totz, *A justification of the modulation approximation to the 3d full water wave problem*, arXiv preprint arXiv:1309.5995 (2013).
- [TW12] Nathan Totz and Sijue Wu, *A rigorous justification of the modulation approximation to the 2d full water wave problem*, Communications in Mathematical Physics **310** (2012), no. 3, 817–883.
- [Whi67] GB Whitham, *Variational methods and applications to water waves*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 299, The Royal Society, 1967, pp. 6–25.
- [Wu97] Sijue Wu, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-d*, Inventiones mathematicae **130** (1997), no. 1, 39–72.
- [Wu99] ———, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-d*, Journal of the American Mathematical Society **12** (1999), no. 2, 445–495.
- [Wu09] ———, *Almost global wellposedness of the 2-d full water wave problem*, Inventiones mathematicae **177** (2009), no. 1, 45–135.
- [Wu11] ———, *Global wellposedness of the 3-d full water wave problem*, Inventiones mathematicae **184** (2011), no. 1, 125–220.
- [Yos82] Hideaki Yosihara, *Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **18** (1982), no. 1, 49–96.
- [Yos83] ———, *Capillary-gravity waves for an incompressible ideal fluid*, Journal of Mathematics of Kyoto University **23** (1983), no. 4, 649–694.
- [Zak68] Vladimir E Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics **9** (1968), no. 2, 190–194.
- [ZR72] VE Zakharov and AM Rubenchik, *Nonlinear interaction of high-frequency and low-frequency waves*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics **13** (1972), no. 5, 669–681.
- [ZZ08] Ping Zhang and Zhifei Zhang, *On the free boundary problem of three-dimensional incompressible Euler equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics **61** (2008), no. 7, 877–940.